



***FACULTAD
DE
CIENCIAS***

**El problema de la separación de elipses
y elipsoides: una aplicación de la
eliminación de cuantificadores.**

(On the ellipses and ellipsoids separation problem: an application of
quantifier elimination.)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Calatayud Pelayo

Director: Laureano González Vega

Septiembre-2018

Índice general

Abstract	2
Resumen	2
0. Introducción.	3
1. Cónicas y Cuádricas.	8
1.1. Cónicas: elipses.	8
1.1.1. Caracterización de las cónicas.	9
1.1.2. Centro.	9
1.2. Cuádricas: elipsoides.	11
1.2.1. Caracterización de las Cuádricas.	12
1.2.2. Centro.	12
2. Cuádricas. Separación de elipsoides.	14
2.1. Preámbulo	14
2.2. Caracterización de la posición relativa de dos elipsoides.	16
2.3. Teorema Fundamental.	27
3. Cónicas. Separación de elipses.	29
3.1. Preámbulo.	29
3.2. Caracterización de la posición relativa de dos elipses.	31
3.3. Teorema Fundamental.	40
4. Interferencia: eliminación de cuantificadores.	42
4.1. Análisis de la interferencia de dos elipses.	43
4.1.1. Caracterización del signo de las raíces de la ecuación característica.	43
4.1.2. Simulaciones fijas.	44
4.1.3. Simulaciones con movimiento.	44
4.2. Análisis de la interferencia de dos elipsoides.	48
4.2.1. Caracterización del signo de las raíces de la ecuación característica.	48
4.2.2. Simulaciones fijas.	49
4.2.3. Simulaciones con movimiento.	50
Conclusiones	55
Bibliografía	55

Abstract.

In this work, several formulas are derived to characterise when two ellipses or two ellipsoids overlap, have an external tangential contact or are separated by a line or a plane, respectively. This problem appears naturally in the resolution of problems in image processing, robotics, modeling, etc. because it is very easy to model different types of objects by using ellipses and ellipsoids.

Let \mathcal{A} and \mathcal{B} two ellipses or two ellipsoids defined respectively by means of their associated matrices $X^TAX = 0$ and $X^TBX = 0$. In this work we analyse the results in “*W. Wang, J. Wang, M.-S. Kim: An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. Computer Aided Geometric Design 18, 531-539, 2001*” that characterise the relative position of two ellipsoids in terms of the sign of the real roots of the polynomial $f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$, they are extended to the case of ellipses and, using the quantifier elimination techniques presented in “*J. Caravantes, L. Gonzalez-Vega: On the Interference Problem for Ellipsoids: Experiments and Applications, Lecture Notes in Computer Science 10931, 89-97, 2018*”, the relative position is characterised in terms of the entries of A and B . In this way, the relative position of \mathcal{A} and \mathcal{B} is determined without computing the points of intersection between both objects and it is only necessary to evaluate the aforementioned formulas

This work also includes an experimentation in Maple showing how the obtained formulas can be used to determine when two moving ellipses or two moving ellipsoids are separated by a line or a plane, respectively.

Key words: Ellipses | Ellipsoids | Overlap | External Touching | Separated | Characteristic Polynomial | Quantifier Elimination | Real Roots.

Resumen.

En este trabajo se derivan fórmulas para caracterizar cuando dos elipses o dos elipsoides se superponen, tienen un contacto tangencial externo o están separados por una recta o un plano, respectivamente. Esta cuestión aparece de forma natural en la resolución de problemas en tratamiento de imágenes, robótica, modelización, etc. Esto es debido a que es muy sencillo modelar distintos tipos de objetos mediante elipses y elipsoides.

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipses o dos elipsoides definidas respectivamente por medio de sus matrices asociadas $X^TAX = 0$ y $X^TBX = 0$. En este trabajo se analizan los resultados en “*W. Wang, J. Wang, M.-S. Kim: An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. Computer Aided Geometric Design 18, 531-539, 2001*” que caracterizan la posición relativa de dos elipsoides en función del signo de las raíces reales del polinomio $f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$, se extienden al caso de elipses y, usando las técnicas de eliminación de cuantificadores presentadas en “*J. Caravantes, L. Gonzalez-Vega: On the Interference Problem for Ellipsoids: Experiments and Applications, Lecture Notes in Computer Science 10931, 89-97, 2018*”, se caracteriza dicha posición relativa en función de las entradas de las matrices A y B . De esta forma se determina la posición relativa de \mathcal{A} y \mathcal{B} sin tener que calcular los puntos de intersección entre ambos objetos y solo es necesario evaluar las fórmulas antes mencionadas

Este trabajo incluye también una experimentación en Maple donde se muestra como funcionan las fórmulas obtenidas para determinar cuando dos elipses o dos elipsoides, en movimiento, están separados por una recta o por un plano, respectivamente.

Palabras clave: Elipses | Elipsoides | Superposición o solapamiento | Contacto tangencial | Separación | Polinomio Característico | Eliminación de Cuantificadores | Raíces reales.

Capítulo 0

Introducción.

Por un lado las motivaciones de este trabajo han sido el estudio de una cuestión relacionada con la combinación del álgebra lineal y la computación. Por otro lado como ya hemos comentado previamente las motivaciones de los investigadores respecto a el estudio de la separación de dos elipses o elipsoides viene causada por la necesidad de matematizar la naturaleza. La Real Academia de la Lengua Española define en su segunda acepción a la naturaleza como el conjunto de todo lo que existe y que está determinado y armonizado en sus propias leyes [1]. La matematización de la naturaleza puede ser entendida como una aproximación razonable de los objetos físicos que componen nuestro entorno. Cuando tenemos un objeto físico, una de las formas de analizarlo es aproximándolo por una construcción de elipses o elipsoides, dependiendo de si el objeto es bidimensional o tridimensional respectivamente.

Lo que los investigadores proponen respecto a este tema, y que será detallado en este trabajo son nuevos algoritmos y técnicas para la determinación de la separación de dos elipsoides o dos elipses con una complejidad algorítmica menor a los algoritmos previos. Las nuevas técnicas se basan principalmente en conceptos de álgebra lineal y cálculo diferencial matrices y sus propiedades, autovalores, autovectores, diagonalización, continuidad de funciones reales y complejas, existencia de raíces reales, etc. Estas nuevas técnicas dejan a un lado los métodos de cálculo computacional basados en el estudio de los puntos de intersección entre las elipses o elipsoides considerados para estudiar su posición relativa y se centran en los valores de los coeficientes de la ecuación $\det(\lambda A + B) = 0$ donde A y B son las matrices asociadas a las dos elipses o elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} considerados. Algunas veces, ciertas mejoras algorítmicas pueden resultar banales, pero si estás ininterrumpidamente iterando un algoritmo, esas mejoras computacionales significan un mejor rendimiento, es decir, tomar decisiones con mayor celeridad, ahorrando tiempo.

Como hemos comentado anteriormente, los ejemplos de posible uso y provecho de estas técnicas son variados. Pueden tener una aplicación, como por ejemplo el estudio en un combate de esgrima. Donde el arma y cuerpos de los esgrimistas están descompuestos en elipsoides, y de esta forma podemos analizar los lances y decidir sobre las posibles situaciones, “*touching*” que indicara que el esgrimista ha sido alcanzado o “*separated*” cuando este consiga esquivar el golpe.



Figura 1: Combate de esgrima. Imagen de [2].

También pueden tener una aplicación en robótica *e.g.*, cuando tenemos robots que queremos que actúen a través de un contacto físico determinado. Queremos que cuando haya *overlap* o *touching* se comporten de una forma, se mueva una rampa, el robot continúe empujando un objeto, etc. Y cuando estén en la situación de *separated* actúen de otra forma, *e.g.* volviendo a iniciar el proceso.



Figura 2: Ejemplo de un robot autónomo. Imagen de [3]

Otro ejemplo en el cual se ve la recurrencia de este tema y con el que, además, el autor ya ha trabajado es el estudio de patrones de radiación de antenas. Aproximar sus lóbulos tanto principales como secundarios (los cuales cumplan unas potencias determinadas) por medio de elipses. El proyecto, llevado a cabo en la empresa TTI NORTE del grupo MULTI TECHNOLOGY GROUP, pretendía estudiar el número mínimo de haces necesarios para garantizar una potencia determinada en una región concreta del espacio, garantizando así la conexión entre nuestra antena en tierra y un satélite LEO (Low Earth Orbit). Relativo a la cuestión aquí planteada era importante luchar contra una excesiva superposición y también que no hubiese áreas donde no se garantizase la potencia establecida. Minimizar el número de haces implicaría un menor gasto de recursos a la hora de estudiar las simulaciones en una cámara anecoica y también consumir menor memoria en la FPGA (Field Programmable Gate array) empleada.

Tomemos un par de simulaciones para señalar la utilidad. Contruimos el patrón de radiación de una antena concreta con unas mismas características específicas: estructura de la antena, número de dipolos, distancia entre los dipolos, elemento de radiación y frecuencia, pero con fases diferentes. Los patrones de radiación simulados tienen la configuración que se muestra en la figura siguiente,

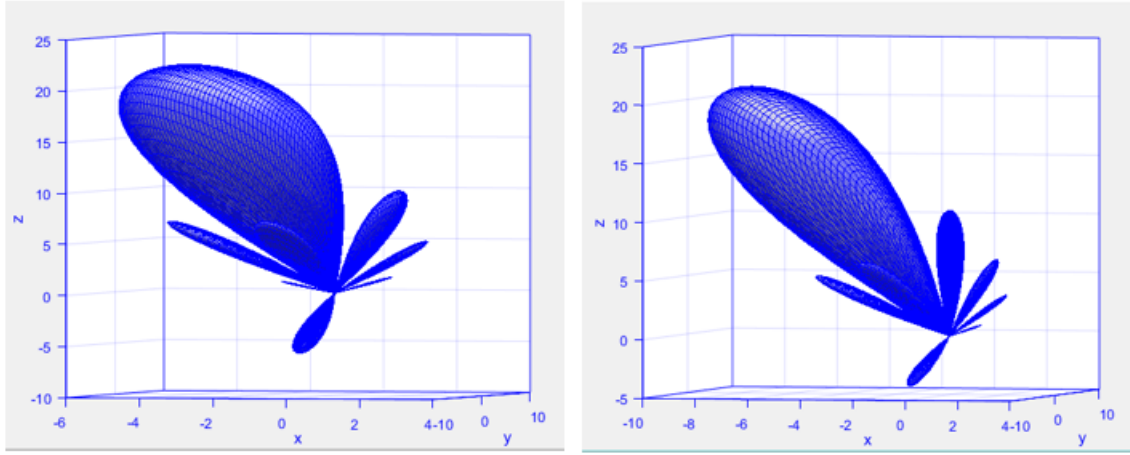


Figura 3: Simulación del patrón de radiación de un mismo UPA (Uniform Planar Array) con diferentes fases, empleando el método Factor de Array. Imagen construida con Matlab2017a.

Cambiamos en el espacio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas, de forma que $\theta \in [-90, 90]$ y $\phi \in [-180, 180]$. Entonces representamos el espacio afín en el plano, garantizando que todos los puntos que se encuentren dentro de una elipse cumplen una potencia determinada. En la representación, para θ solo tomamos los valores de 0 a 90 puesto que al ser una antena plana, su radiación hacia atrás es despreciable.

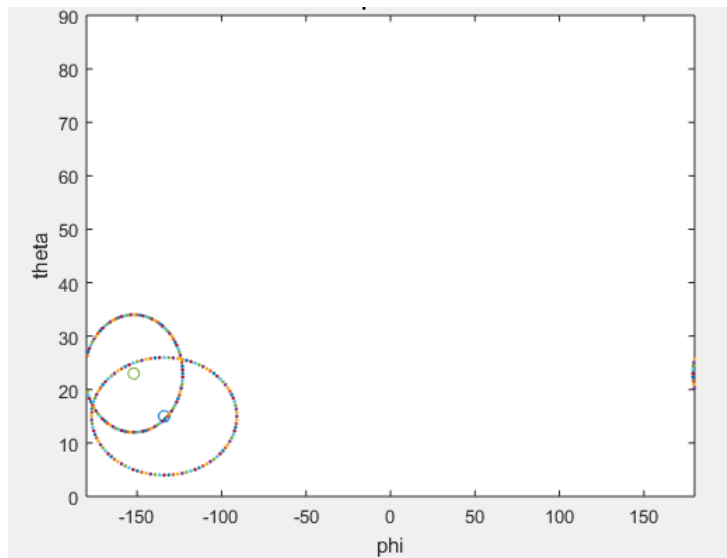


Figura 4: Tomando la Figura 3 aproximamos por medio de elipses las regiones del espacio que consigan una potencia de radiación mayor a 16dB. Imagen construida con Matlab2017a.

De esta forma podemos garantizar que en los puntos interiores de las elipses garantizamos que tengan al menos la potencia requerida.

El problema que este trabajo aborda es la determinación de la posición relativa de dos elipses o elipsoides cualquiera sin calcular sus puntos de intersección.

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipses cualquiera situadas en cualquier zona del plano. Entonces trataremos de decidir si se encuentran separadas, si tienen al menos un punto interior común o si son externamente tangentes. A partir de transformaciones geométricas modificamos las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} en dos elipses de forma que \mathcal{A} sea una elipse cuyo centro coincida con el origen de coordenadas y sus ejes descansen sobre los ejes de coordenadas. Una vez que nos encontramos en esta situación, aplicamos una homotecia tal que la elipse \mathcal{B} se convierta en una circunferencia. La elipse \mathcal{A} se deformará pero manteniendo su centro y ejes intactos. Nos encontramos ahora con una elipse \mathcal{A} y una circunferencia \mathcal{B} . Cuyas ecuaciones generales son,

$$\mathcal{A}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \mathcal{B}: (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Las matrices asociadas de \mathcal{A} y \mathcal{B} son:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ -x_c & -y_c & -r^2 + x_c^2 + y_c^2 \end{pmatrix}$$

En el capítulo 3 estudiaremos el polinomio $f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$ y a partir del comportamiento del signo de sus raíces reales determinaremos la posición relativa de las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Para el caso tridimensional procederemos de manera similar. Tenemos dos elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} en cualquier región del espacio y queremos determinar si se encuentran separados por un plano, si tiene algún punto interior común o si son tangentes exteriormente. Nos ayudaremos de transformaciones geométricas y trasladaremos el centro y los ejes del elipsoide \mathcal{A} al origen de coordenadas y a los ejes de coordenadas respectivamente. Posterior a esto, por medio de una homotecia, transformamos el elipsoide \mathcal{B} en una esfera sin alterar el centro y los ejes de \mathcal{A} . Por tanto sus ecuaciones generales pasan a ser,

$$\mathcal{A}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \mathcal{B}: (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

Las matrices asociadas de \mathcal{A} y \mathcal{B} son;

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 & -z_c \\ -x_c & -y_c & -z_c & -r^2 + x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 \end{pmatrix}$$

En el capítulo 2 estudiaremos el polinomio $f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$ y a partir del signo de sus raíces reales podremos determinar la posición relativa de los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos.

- En el Capítulo 1, revisaremos las principales propiedades de las cónicas y las cuádricas, caracterizandolas según los valores de los determinantes de las matrices asociadas. También expondremos el cálculo del centro tanto para elipses como para elipsoides.
- En el Capítulo 2 se analiza el problema de la separación de dos elipsoides. Se incluye aquí la descripción del problema, los lemas y teoremas empleados con su demostración detallada y la relación entre las raíces reales de la ecuación característica y la posición relativa de los dos elipsoides.
- En el Capítulo 3 se analiza el problema de la separación de dos elipses. Se presenta el problema, los lemas y los teoremas con sus demostraciones, de forma análoga al capítulo anterior, pero con las características propias del caso bidimensional. También se presenta la relación entre las raíces reales de la ecuación característica y la separación de las dos elipses.
- En el Capítulo 4, presentamos diferentes simulaciones empleando los resultados previamente presentados y la eliminación de cuantificadores. Haremos simulaciones tanto para el caso de las elipses como para el caso de los elipsoides. También haremos simulaciones en las cuales los dos objetos a estudiar, elipses o elipsoides se muevan en función al tiempo. Y por último analizaremos los tiempos de ejecución del algoritmo mostrado.
- En el Capítulo 5 se muestran las conclusiones de este trabajo.

Comenzar presentando el problema de determinar la posición de los dos elipsoides, con sus lemas y teoremas relativos para después analizar el problema desde la perspectiva bidimensional puede resultar llamativo. Sin embargo se ha seguido esta jerarquía para plasmar en la memoria el orden cronológico de aprendizaje y su contexto.

Capítulo 1

Cónicas y Cuádricas.

En este capítulo comenzaremos situandonos en el plano afín euclídeo. Se expondrán los distintos tipos de cónicas no degeneradas y como se caracterizan. Posteriormente se explicará el cálculo del centro de la elipse. Seguidamente nos trasladaremos al espacio afín euclídeo donde se presentarán las cuádricas no degeneradas junto con una caracterización de las mismas. Finalmente expondremos también el cálculo del centro del elipsoide.

1.1. Cónicas: elipses.

Las cónicas surgen como las distintas intersecciones posibles entre un cono y un plano. Las opciones no degeneradas que se manifiestan de esta combinación son: la parábola, la hipérbola y la elipse. (Considerando a la circunferencia como un caso particular de la elipse).

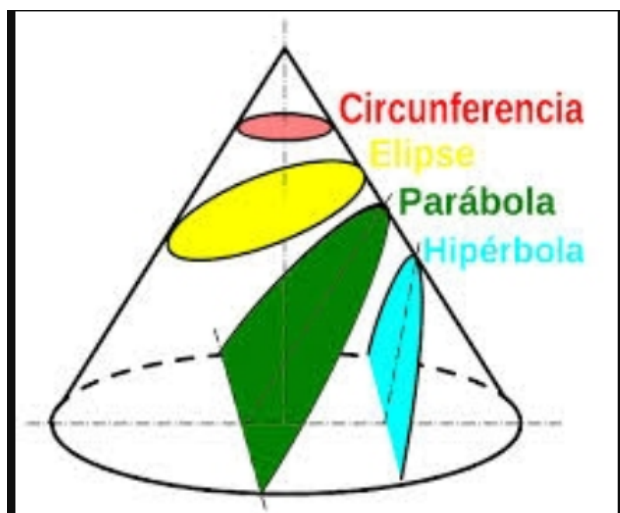


Figura 1.1: Tipos de cónicas no degeneradas y como se producen. Imagen de [4].

La ecuación general de una cónica viene determinada por la expresión:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad \text{con} \quad (a_{11}, a_{22}, a_{33}) \neq (0, 0, 0).$$

Otra forma de presentar una cónica es a partir de su matriz asociada. De esta forma la cónica

queda unívocamente definida por medio de su matriz asociada A ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = A^T.$$

Y una última forma de escribir la ecuación de una cónica es a través de la matriz de términos cuadráticos T ,

$$(x \ y) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13} \ a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0, \quad \text{con} \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

1.1.1. Caracterización de las cónicas.

Las cónicas quedan caracterizadas por el valor de los determinantes de su matriz asociada y de la matriz de términos cuadráticos de acuerdo con la siguiente tabla:

Caracterización	$ A > 0$	$ A = 0$	$ A < 0$
$ T > 0$	Elipse Imaginaria	Rectas imaginarias cortándose	Elipse Real
$ T = 0$	Parábola	$\text{rang}(A) = 2$: rectas paralelas	Parábola
$ T = 0$	Parábola	$\text{rang}(A) = 1$: Recta doble	Parábola
$ T < 0$	Hipérbola	Rectas reales cortándose	Hipérbola

Cuadro 1.1: Caracterización de una cónica en función de los determinantes de la matriz asociada y la matriz de términos cuadráticos. Datos obtenidos de [5].

En consecuencia una cónica será una elipse si y solo si $|T| > 0$ y $|A| < 0$. Una propiedad fundamental, y que emplearemos más adelante en la demostración de el Lema 3.5, es que los determinantes de A y T se conservan por giros y traslaciones. Por tanto podemos realizar este tipo de transformaciones a nuestras elipses sin modificar los valores $\det(A)$ y $\det(T)$.

1.1.2. Centro.

Definición 1.1 *Se define el centro de una cónica como un punto afín que es centro de simetría de la misma.*

Observemos la forma de calcular el centro de la elipse. Sea el punto $(a, b, 1)$ un centro de la elipse. Sea $(p, q, 1)$ un vector director cualquiera. Podemos construir una recta cualquiera de dirección (p, q) y que pase por el punto (a, b) .

$$r : (x, y) = (a, b) + \mu(p, q)$$

Entonces sustituyendo en la ecuación de la cónica,

$$(p \ q \ 0) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \mu^2 + 2(a \ b \ 1) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \mu + (a \ b \ 1) A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.1)$$

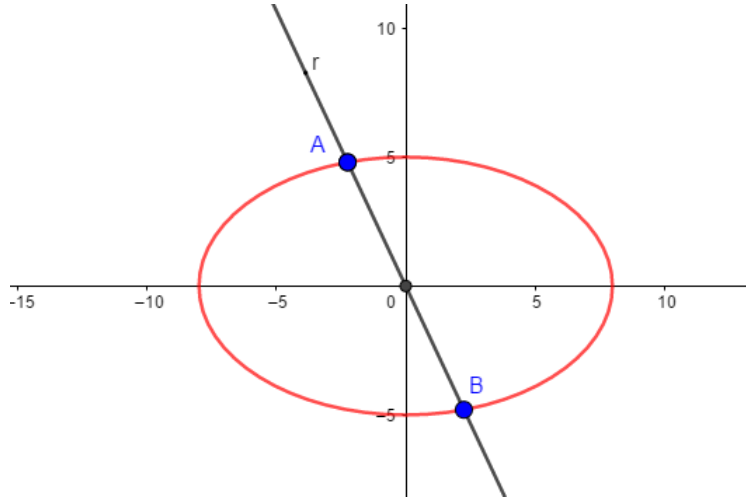


Figura 1.2: Observamos como los puntos A y B son opuestos respecto del centro de la elipse. Esto ocurre por ser el centro de la elipse centro de simetría de la misma. Imagen construida con Geogebra.

Para que (a, b) sea un centro de la elipse se tiene que cumplir que los dos puntos de intersección de la recta r con la elipse sean opuestos respecto (a, b) . Para que esto ocurra se tiene que cumplir que el coeficiente de μ en la ecuación de segundo grado (1.1) sea nulo. Vease la gráfica siguiente,

Como el coeficiente de μ ha de ser nulo, por tanto

$$(a \ b \ 1) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ para cualquier } (p, q) \neq (0, 0).$$

Tomando,

$$(a \ b \ 1) A = (x_0 \ y_0 \ z_0),$$

entonces,

$$(x_0 \ y_0 \ z_0) \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ para cualquier } (p, q) \neq (0, 0).$$

Es fácil ver que tomando $(p, q) = (1, 0)$ se ha de cumplir que $x_0 = 0$ y tomando $(p, q) = (0, 1)$ se tiene que $y_0 = 0$. En consecuencia tenemos que,

$$(a \ b \ 1) A = (0, 0, h) \text{ con } h \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Observamos que para que el sistema (1.2) tenga una única solución ha de cumplirse que $\det(A) \neq 0$ y $\det(T) \neq 0$. Condiciones que se cumplen exclusivamente en el caso de la elipse como se observa en el Cuadro 1.1. Podemos asegurar por tanto que la elipse es la única cónica que tiene un único centro.

1.2. Cuádricas: elipsoides.

Las cuádricas son superficies en el espacio tridimensional. Hay seis tipos de superficies cuádricas no degeneradas que generalizan a las cónicas: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloide y paraboloide hiperbólico.

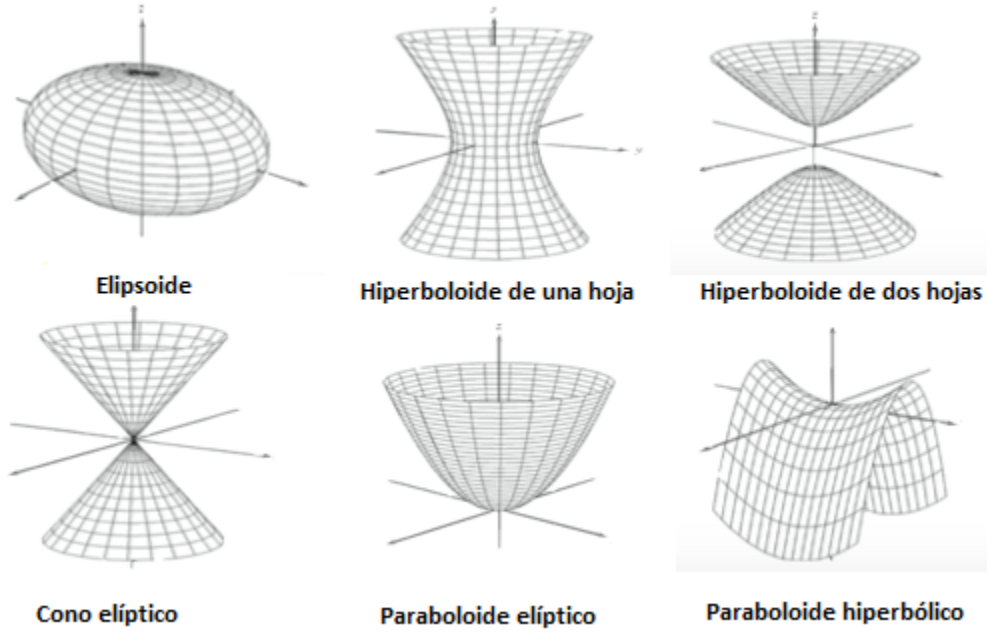


Figura 1.3: Observamos los diferentes tipos de cuádricas. Imágenes extraídas de [6].

La ecuación general de una cuádrlica es una ecuación de segundo grado con la siguiente estructura,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

$$\text{con } (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Igual que en la sección de cónicas también podemos escribir la ecuación general de una cuádrlica a partir de su matriz asociada A .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x & y & 1 & z \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{donde } A = A^T.$$

La última forma de escribir la ecuación general de una cuádrlica es a través de su matriz de términos cuadráticos T ,

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

1.2.1. Caracterización de las Cuádricas.

Análogamente a como se hizo en la sección relativa a la caracterización de las cónicas, también podemos determinar el tipo de cuádrica a partir de la matriz asociada A y la matriz de términos cuadráticos T tal y como se muestra en el cuadro siguiente:

	rang(A)=4	
Autovalores	$\det(A) > 0$	$\det(A) < 0$
$+, +, +$	Elipsoide imaginario	Elipsoide real
$+, +, -$	Hiperboloide de 1 hoja	Hiperboloide de 2 hojas
$+, +, 0$	Paraboloide elíptico	
$+, -, 0$	Paraboloide hiperbólico	
Autovalores	rang(A)=3	
$+, +, +$	Cono imaginario	
$+, +, -$	Cono real	
$+, +, 0$	Cilindro elíptico real o imaginario	
$+, -, 0$	Cilindro hiperbólico	
$+, 0, 0$	Cilindro Parabólico	
Autovalores	rang(A)=2	
$+, +, 0$	Planos imaginarios que se cortan	
$+, -, 0$	Planos reales que se cortan	
$+, 0, 0$	Planos paralelos reales o imaginarios	
Autovalores	rang(A)=1	
$+, 0, 0$	Plano doble	

Cuadro 1.2: En la columna autovalores hemos utilizado el signo “+” para representar un autovalor positivo, el signo “−” para los autovalores negativos y “0” cuando el autovalor es nulo. Datos obtenidos de [5].

Caracterización de una cuádrica a partir de la matriz asociada y los autovalores de la matriz de términos cuadráticos.

1.2.2. Centro.

Definición 1.2 *El centro de una cuádrica es un punto afín centro de simetría de la misma.*

Sea el punto (a, b, c) unas coordenadas genéricas para denotar al centro de la cuádrica. Sea (p, q, t) un vector director. Podemos construir una recta cualquiera de dirección (p, q, t) y que pasa por el punto (a, b, c) ,

$$r : (x, y, z) = (a, b, c) + \mu(p, q, t).$$

Sustituyendo en la ecuación de la cuádrica, se obtiene la ecuación:

$$(p \ q \ t \ 0) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mu^2 + 2(a \ b \ c \ 1) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mu + (a \ b \ c \ 1) A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Para que (a, b, c) sea centro de la cuádrica se ha de satisfacer que los puntos de intersección de la cuádrica con la recta r sean opuestos:

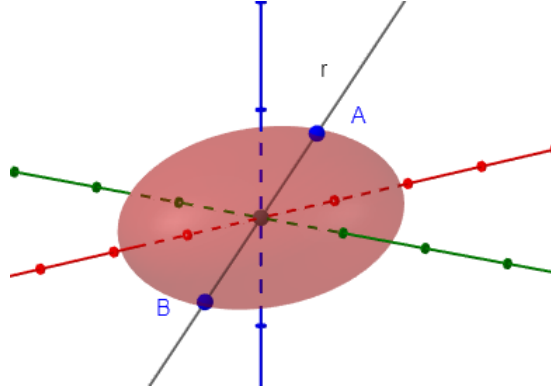


Figura 1.4: Observamos como los puntos A y B son opuestos respecto del centro del elipsoide. Esto ocurre por ser el centro del elipsoide centro de simetría del mismo. Imagen construida con Geogebra3D.

Para que los puntos de intersección de la recta r con el elipsoide sean opuestos ha de cumplirse que, en la ecuación (1.3) el coeficiente de μ sea nulo.

$$(a \ b \ c \ 1) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{para todo } (p, q, t) \neq (0, 0, 0).$$

Tomando,

$$(a \ b \ c \ 1) A = (x_0 \ y_0 \ z_0 \ t_0),$$

entonces,

$$(x_0 \ y_0 \ z_0 \ t_0) \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{para cualquier } (p, q, t) \neq (0, 0, 0).$$

Es fácil ver que si $(p, q, t) = (1, 0, 0)$ se tiene que $x_0 = 0$, si $(p, q, t) = (0, 1, 0)$ se tiene que $y_0 = 0$. Y finalmente $(p, q, t) = (0, 0, 1)$ se tiene que $z_0 = 0$. En consecuencia de lo anterior,

$$(a \ b \ c \ 1) A = (0, 0, 0, h) \quad \text{con } h \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Para que el sistema (1.4) tenga una única solución ha de cumplirse que $\det(A) \neq 0$ y $\det(T) \neq 0$. Ambas condiciones se cumplen cuando la cuádrica es un elipsoide como muestra el Cuadro 1.2. Como el sistema tiene una única solución se cumple que el elipsoide tiene un único centro.

Capítulo 2

Cuádricas. Separación de elipsoides.

En este segundo capítulo analizaremos con todo detalle los resultados que aparecen en el artículo [8] enunciando los lemas y teoremas que presenta y añadiendo una explicación detallada de sus demostraciones.

2.1. Preámbulo

Como ya hemos comentado anteriormente el problema inicial a resolver parte de dos elipsoides cualquiera en cualquier región del espacio. Debemos determinar la posición relativa de ambos elipsoides. Las posibles posiciones a considerar son: que estén separados, esto ocurrirá cuando exista un plano que separe ambos elipsoides, que estén superpuestos, es decir que tengan al menos un punto interior en común, y por último, que los dos elipsoides sean tangentes externamente.

El problema comienza con dos elipsoides cualquiera y hemos visto que podemos resolver este problema por medio de transformaciones geométricas a un problema en el cual tengamos por un lado un elipsoide cuyo centro sea el origen de coordenadas y sus ejes estén en los ejes de coordenadas y por otro lado tengamos una esfera en cualquier región del espacio. Sea \mathcal{A} el elipsoide cuyo centro esta en el origen de coordenadas y cuyos ejes coinciden con los ejes de coordenadas. Y sea \mathcal{B} una esfera situada en cualquier lugar del espacio tridimensional. Las ecuaciones de ambos lugares geométricos vienen determinadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = X^T A X = 0, \quad \text{con } 0 < a \leq b \leq c. \\ \mathcal{B}: \quad & (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 - r^2 = X^T B X = 0, \quad \text{con } 0 < r. \\ & X = (x, y, z, 1).\end{aligned}$$

Las matrices asociadas que definen el elipsoide y la esfera son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 & -z_c \\ -x_c & -y_c & -z_c & -r^2 + x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 \end{pmatrix}.$$

Se define el polinomio característico de \mathcal{A} y \mathcal{B} como

$$f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$$

Este polinomio tiene la estructura siguiente:

$$f(\lambda) = - \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1 \right) (\lambda + r^2) + \frac{x_c^2}{a^2} \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1 \right) \lambda + \frac{y_c^2}{b^2} \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1 \right) \lambda + \frac{z_c^2}{c^2} \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) \lambda. \quad (2.1)$$

Una vez presentados los lugares geométricos con los que vamos a trabajar y las matrices que los definen, vamos a presentar los lemas y teoremas con sus demostraciones que caracterizarán la posición relativa de los dos elipsoides considerados. Estos conceptos nos ayudarán a estudiar la posición relativa entre \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Lema 2.1 *Asumiendo que $0 < a < b < c$ se cumple que,*

- (1) $f(0) < 0$.
- (2) $f(-a^2) < 0$ si $x_c \neq 0$, y $f(-a^2) = 0$ si $x_c = 0$.
- (3) $f(-b^2) > 0$ si $y_c \neq 0$, y $f(-b^2) = 0$ si $y_c = 0$.
- (4) $f(-c^2) < 0$ si $z_c \neq 0$, y $f(-c^2) = 0$ si $z_c = 0$.

Demostración. Conociendo que $r, x_c, y_c, z_c \in \mathbb{R}$ y $0 < a < b < c$, se tiene:

- (1) $f(0) = -r^2 < 0$.
- (2) Evaluando la función $f(\lambda)$ en $-a^2$ se tiene que,

$$f(-a^2) = \frac{x_c^2}{a^2} \left(\frac{-a^2}{b^2} + 1 \right) \left(\frac{-a^2}{c^2} + 1 \right) (-a^2).$$

Por un lado $b > a$, por tanto, $b^2 > a^2$ y claramente entonces $-\frac{a^2}{b^2} + 1 > 0$. Como $c^2 > a^2$, entonces $-\frac{a^2}{c^2} + 1 > 0$. Concluimos así que

$$\frac{x_c^2}{a^2} \left(\frac{-a^2}{b^2} + 1 \right) \left(\frac{-a^2}{c^2} + 1 \right) (-a^2) < 0.$$

Por otro lado si $x_c^2 = 0$ entonces es directo ver que $f(-a^2) = 0$.

- (3) Sustituyendo $-b^2$ en la función $f(\lambda)$ se tiene

$$f(-b^2) = \frac{y_c^2}{b^2} \left(\frac{-b^2}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{-b^2}{c^2} + 1 \right) (-b^2).$$

Procediendo de la misma manera, basta observar que en este caso $-\frac{b^2}{a^2} + 1 < 0$ y que $-\frac{b^2}{c^2} + 1 > 0$ y en consecuencia, $f(-b^2) > 0$. Además también es directo ver que si $y_c = 0$ entonces se cumple que $f(-b^2) = 0$.

- (4) Evaluando la función $f(\lambda)$ en $-c^2$ se cumple que,

$$f(-c^2) = \frac{z_c^2}{c^2} \left(\frac{-c^2}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{-c^2}{b^2} + 1 \right) (-c^2).$$

Por un lado $c > b$, por tanto, $c^2 > b^2$ y claramente entonces $-\frac{c^2}{b^2} + 1 < 0$. Por otro lado como $c > a$ se tiene entonces que $c^2 > a^2$ y por tanto $-\frac{c^2}{a^2} + 1 < 0$. Concluimos así que

$$\frac{z_c^2}{c^2} \left(\frac{-c^2}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{-c^2}{b^2} + 1 \right) (-c^2) < 0.$$

Si $x_c^2 = 0$ es directo ver que $f(-c^2) = 0$. \square

Teorema 2.2 Si $0 < a \leq b \leq c$ entonces se cumple que el polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$ tiene al menos dos raíces reales negativas en $[-c^2, -a^2]$ contando la multiplicidad. Una raíz real esta en $[-c^2, -b^2]$ y la otra en $[-b^2, -a^2]$.

Demostración. Como consecuencia del Lema 2.1, por un lado, podemos decir que $f(-a^2) < 0$ y $f(-b^2) > 0$ y como f es una función continua en \mathbb{R} existe $d \in [-b^2, -a^2]$ tal que $f(d) = 0$. Por otro lado como $f(-b^2) > 0$ y $f(-c^2) < 0$ existe $e \in [-c^2, -b^2]$ con $f(e) = 0$. \square

Lema 2.3 Todo factor común no constante a todos los menores 3×3 de la matriz $\lambda A + B$ ha de ser $\lambda + a^2$, $\lambda + b^2$ o $\lambda + c^2$.

Demostración. Es suficiente ver que el primer menor $\det[(\lambda A + B)(1, 2, 3|1, 2, 3)]$ es

$$\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1\right). \quad \square$$

2.2. Caracterización de la posición relativa de dos elipsoides.

A continuación se muestran las condiciones necesarias para la separación de los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Teorema 2.4 Si \mathcal{A} y \mathcal{B} están separados por un plano, entonces $f(\lambda)$ tiene dos raíces reales positivas y distintas.

Para probar el Teorema 2.4 necesitaremos probar previamente el lema siguiente.

Lema 2.5 Si $f(\lambda)$ tiene una raíz positiva doble entonces \mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes en un punto.

Demostración. Sea $\lambda_0 > 0$ una raíz doble de $f(\lambda)$. Apoyándonos en el Lema 2.3 observamos que λ_0 no es raíz del determinante de ninguna submatriz 3×3 de $\lambda A + B$. Basta ver que

$$\det[(\lambda_0 A + B)(1, 2, 3|1, 2, 3)] = \left(\frac{\lambda_0}{a^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda_0}{b^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda_0}{c^2} + 1\right) > 0,$$

puesto que $0 < a \leq b \leq c$ y $\lambda_0 > 0$. Por un lado gracias a estas condiciones podemos afirmar que $\text{rang}[(\lambda_0 A + B)(1, 2, 3|1, 2, 3)] = 3$. Entonces se cumple que $\text{rang}[\lambda_0 A + B] = 3$. Por *El Teorema de las Dimensiones* se cumple que $\dim(\text{Ker}[\lambda_0 A + B]) = 1$. Para seguir con la demostración, descomponemos la matriz $\lambda A + B$ de la siguiente forma,

$$\lambda A + B = A \cdot A^{-1}(\lambda A + B) = A(\lambda I + A^{-1}B) = A(\lambda I - (-A^{-1}B))$$

Por ser \mathcal{A} un elipsoide se cumple que $\det(A) < 0$. Como consecuencia de esto tenemos por un lado que, como λ_0 es una raíz doble del $\det(\lambda A + B)$, entonces también lo es de $\det(A(\lambda I - (-A^{-1}B)))$. Por tanto λ_0 es un autovalor de $-A^{-1}B$ con multiplicidad 2. Por otro lado, se cumple que

$$\text{Ker}[\lambda A + B] = \text{Ker}[(\lambda I + A^{-1}B)] = \text{Ker}[A(\lambda I - (-A^{-1}B))] = \text{Ker}[(\lambda I - (-A^{-1}B))].$$

Entonces $\dim(\text{Ker}[\lambda_0 I - (-A^{-1}B)]) = 1$. Y por tanto $\text{Ker}[\lambda_0 I - (-A^{-1}B)] \neq \emptyset$. Por tanto existe X_0 un autovector de $-A^{-1}B$ asociado a λ_0 .

De acuerdo con [9, pág 380-381] podemos encontrar una matriz M tal que $J = M^{-1}(-A^{-1}B)M$ donde J sea la *Fórmula Canónica de Jordan* de $-A^{-1}B$. Se pueden dar aquí dos posibilidades: que J sea una matriz diagonal o que la matriz $-A^{-1}B$ no se pueda diagonalizar. Tenemos aquí que para cada λ_i autovalor y para cada X_i autovector, se cumple que:

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad i \in 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

$$AX_{i+1} = \lambda_i X_{i+1} + X_i \quad i \in 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.3)$$

donde m es la multiplicidad del autovalor λ_i . Empleando la ecuación (2.2) en nuestro caso particular obtenemos que,

$$-A^{-1}BX_0 = \lambda_0 X_0 \quad \text{y} \quad A^{-1}BX_0 = -\lambda_0 X_0. \quad (2.4)$$

Sea X_1 un autovector cualquiera de $-A^{-1}B$. Entonces nos valemos de la ecuación (2.3) tal que,

$$A^{-1}BX_1 = -\lambda_0 X_1 + X_0. \quad (2.5)$$

Ahora despejando las ecuaciones (2.3) y (2.4) respectivamente se obtiene,

$$(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_0 = 0, \quad \text{y} \quad (2.6)$$

$$(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_1 = X_0. \quad (2.7)$$

Por un lado tenemos que multiplicando en la ecuación (2.7) por $\lambda_0 I + A^{-1}B$ y conociendo la ecuación (2.6) se cumple que,

$$(\lambda_0 I + A^{-1}B)^2 X_1 = (\lambda_0 I + A^{-1}B)X_0 = 0.$$

Por otro lado, haciendo la transpuesta en la ecuación (2.7) y sabiendo que las matrices A , B y A^{-1} son simétricas podemos escribir

$$X_0^T = X_1^T(\lambda_0 I + BA^{-1}).$$

Multiplicando por A a derecha, y

$$X_0^T A = X_1^T(\lambda_0 I + BA^{-1})A.$$

desarrollando el lado derecho de la ecuación,

$$X_1^T(\lambda_0 I + BA^{-1})A = X_1^T(\lambda_0 A + B) = X_1^T AA^{-1}(\lambda_0 A + B) = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B),$$

tenemos que,

$$X_0^T A = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B).$$

Multiplicando por X_0 a derecha, se tiene

$$X_0^T AX_0 = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_0 = 0.$$

Sabemos que la ecuación anterior es nula por la ecuación (2.6). Ahora aplicando la igualdad de la ecuación (2.7) a X_0 ,

$$X_0^T AX_0 = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B)(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_1 = 0,$$

agrupando se obtiene:

$$X_0^T AX_0 = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B)^2 X_1 = 0. \quad (2.8)$$

Como conclusión obtenemos la igualdad de la ecuación (2.8).

Recopilando todo lo mostrado, hemos probado que X_0 es un punto del elipsoide \mathcal{A} . Procediendo de manera similar, se prueba que X_0 también es un punto del elipsoide \mathcal{B} .

Por definición de planos tangentes y por ser X_0 un punto de \mathcal{A} y de \mathcal{B} tenemos que $\pi_1 : X^T A X_0 = 0$ y $\pi_2 : X^T B X_0 = 0$ son los planos tangentes a \mathcal{A} y \mathcal{B} en X_0 respectivamente.

Analizando la ecuación (2.4) es fácil ver que $-\lambda_0 A X_0 = B X_0$. Por ello las direcciones normales a los planos tangentes π_1 y π_2 son proporcionales. Es decir ambos planos son el mismo. Y como conclusión \mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes en el punto X_0 .

Se prueba a continuación el Teorema 2.4.

Demostración. Se construye una esfera \mathcal{B}_0 con radio $r > 0$ y centro $(a + r + 1, 0, 0)$. Su matriz es la siguiente:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(a + r + 1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(a + r + 1) & 0 & 0 & a^2 + 2ar + 2r + 2a + 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de \mathcal{A} y \mathcal{B}_0 es $f_0(\lambda) = \det(\lambda A + B_0)$ y su ecuación característica es

$$-\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1\right) (\lambda + r^2) + \frac{(a + r + 1)^2}{a^2} \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1\right) \lambda = 0.$$

Analicemos los factores comunes con raíces reales

$$\left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1\right) \left(-\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) (\lambda + r^2) + \lambda \frac{(a + r + 1)^2}{a^2}\right) = 0.$$

Podemos ver que $-b^2$ y $-c^2$ son raíces reales negativas de la ecuación característica. Ahora, busquemos las otras dos raíces en la función,

$$f_1(\lambda) = -\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) (\lambda + r^2) + \lambda \frac{(a + r + 1)^2}{a^2}$$

Desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación:

$$\lambda^2 - \lambda(2ar + 2a + 2r + 1) + a^2 r^2 = 0 \tag{2.9}$$

Nombremos los coeficientes de la ecuación para manejarlos con mayor comodidad:

$$\hat{a}\lambda^2 + \hat{b}\lambda + \hat{c} = \lambda^2 - \lambda(2ar + 2a + 2r + 1) + a^2 r^2 = 0.$$

Conociendo que $a > 0$ y $r > 0$, sus coeficientes verifican,

- $\hat{b} = -(2ar + 2a + 2r + 1) < 0$.
- $\hat{c} = a^2 r^2 > 0$.

Y también podemos ver:

$$\hat{b}^2 = 4a^2r^2 + 8a^2r + 8ar^2 + 12ar + 4ar^2 + 4a^2 + 4r^2 + 4a + 4r + 1.$$

Calculando el discriminante de la ecuación (2.9) se tiene que,

$$\hat{b}^2 - 4\hat{c} = 4a^2r^2 + 8a^2r + 8ar^2 + 12ar + 4ar^2 + 4a^2 + 4r^2 + 4a + 4r + 1 - 4a^2r^4 > 0. \quad (2.10)$$

De esta forma, el discriminante de la ecuación es positivo y podemos garantizar que las dos raíces de $f_1(\lambda)$ son reales:

La primera, $\lambda_1 = \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}}{2}$ es positiva por la ecuación (2.10).

La segunda, $\lambda_2 = \frac{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}}{2}$ y procedemos a estudiar su signo.

Conociendo que $\hat{c} = r^2a^2 > 0$, $-\hat{b} > 0$ y $\hat{b}^2 > 0$, con la ayuda de la ecuación (2.10), se tiene:

$$\hat{b}^2 > \hat{b}^2 - 4\hat{c} > 0 \Rightarrow -\hat{b} > \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}} > 0 \Rightarrow -\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}} > 0.$$

Como consecuencia de ello podemos afirmar que $\lambda_2 > 0$ y, por tanto, la segunda raíz también es real y positiva. Entonces ya sabemos que ambas raíces de $f_1(\lambda)$ son reales, positivas y distintas.

Sea \mathcal{B} una esfera cualquiera de radio r y separada de \mathcal{A} . Construimos una aplicación $B(t)$ de forma que nos vayamos trasladando de \mathcal{B} a \mathcal{B}_0 , sin tocar \mathcal{A} en ningún momento. Cumpliendo que $B(0) = \mathcal{B}_0$, $B(1) = \mathcal{B}$ y además $B(t) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, para todo $t \in [0, 1]$. Cabe destacar que dicha aplicación puede construirse como composición de dos aplicaciones afines $h \circ g$ o como una aplicación no afín B , elegida adecuadamente. La siguiente ilustración esclarece lo aquí planteado.

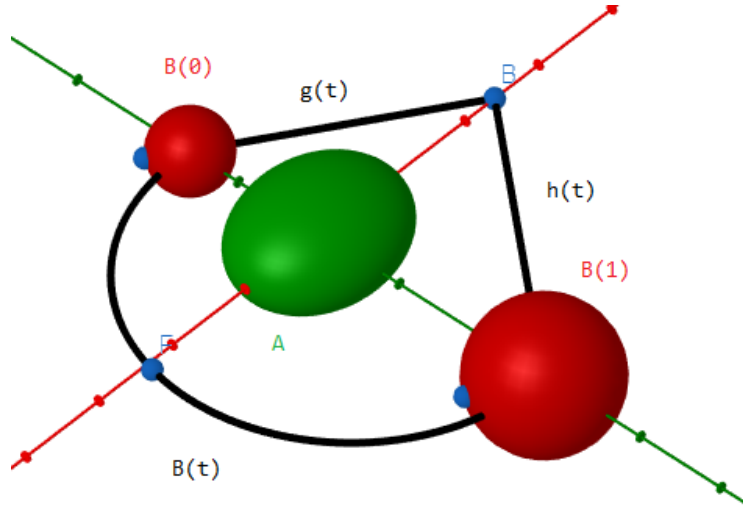


Figura 2.1: Figura construida con Geogebra3D.

Se define ahora la función $f(\lambda; t) = 0$ que es la ecuación característica de A con $B(t)$ para $t \in [0, 1]$.

Por el Teorema 2.2 sabemos que la ecuación tiene dos raíces negativas. Nosotros debemos probar que para todo $t \in [0, 1]$ la ecuación característica $f(\lambda; t) = 0$ tiene otras dos raíces distintas y positivas. Nos ayudamos del resultado [10, pág. 152-155] sobre la continuidad de las raíces de un polinomio: tomamos $a_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, funciones complejas y continuas, definidas en un intervalo I , entonces existen $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ tal que sean las raíces de la ecuación siguiente para cada $t \in I$,

$$\lambda^n - a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n(t) = 0.$$

Centrándonos en nuestro caso, donde $n = 4$, la ecuación característica queda definida como,

$$\begin{aligned} f(\lambda; t) = & - \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1 \right) (\lambda + r^2) + \frac{x_c^2(t)}{a^2} \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1 \right) \lambda \\ & + \frac{y_c^2(t)}{b^2} \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{c^2} + 1 \right) \lambda + \frac{z_c^2(t)}{c^2} \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) \lambda = 0. \end{aligned}$$

Vemos que el coeficiente director es $-\frac{1}{(a^2b^2c^2)}$, que es diferente de 0, para todo $t \in [0, 1]$ por ser $0 < a \leq b \leq c$ y por tanto $\deg(f(\lambda, t)) = 4$.

Sean en nuestro caso $\alpha_j(t)$ para $1 \leq j \leq 4$ funciones continuas y complejas que escogidas debidamente constituyen las cuatro raíces de $f(\lambda; t) = 0$. Hemos visto previamente que tomando $t = 0$ la ecuación $f(\lambda; 0) = 0$ tiene dos raíces reales, positivas y distintas y otras dos raíces reales negativas. Con la notación empleada, $\alpha_1(0) = -c^2 \leq \alpha_2(0) = -b^2 < 0 < \alpha_3(0) = \lambda_1 < \alpha_4(0) = \lambda_2$. En primer lugar para $f(\lambda; t) = 0$ tenemos que, según el Teorema 2.2 siempre hay dos raíces negativas. Notemos $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(t)$ como las raíces negativas para todo $t \in [0, 1]$. En segundo lugar, debemos probar que $\alpha_3(t)$ y $\alpha_4(t)$ son raíces positivas distintas y para ello procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que $f(\lambda, t_0) = 0$ no tiene dos raíces positivas distintas para algún $t_0 \in [0, 1]$. Entonces nos pueden ocurrir dos casos,

- (i) Que $\alpha_3(t_0)$ o $\alpha_4(t_0)$ sea una raíz no positiva, 0 o ∞ sin llegar a ser una raíz imaginaria.
- (ii) Las raíces $\alpha_3(t_0)$ y $\alpha_4(t_0)$ son un par de raíces conjugadas imaginarias.

Caso (i): Por un lado hemos dicho anteriormente que podemos escribir $f(t; \lambda) = 0$ como

$$\frac{-\lambda^4}{(abc)^2} + a_3(t)\lambda^3 + a_2(t)\lambda^2 + a_1(t)\lambda + (-r^2) = 0.$$

Donde $\frac{-1}{(abc)^2} < 0$ y $-r^2 < 0$. Como el denominador del coeficiente director no se anula para ningún valor puesto que a , b y c son diferentes de cero, podemos decir que la función no toma valores infinitos. Además también podemos decir que no existe $t_k \in [0, 1]$ tal que $\alpha_4(t_k) = 0$, puesto que, en ese caso y para dicho t tendríamos la siguiente ecuación característica

$$a(\lambda - \alpha_1(t_k))(\lambda - \alpha_2(t_k))(\lambda - \alpha_3(t_k))\lambda = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Y esto no puede ocurrir puesto que el coeficiente constante $-r^2$ es diferente de 0. Para $\alpha_4(t_k)$ el razonamiento es análogo.

Por otro lado sabemos por [10, pág 152-155] que $\alpha_3(t)$ y $\alpha_4(t)$ son dos funciones continuas en el

intervalo $[0, 1]$. También sabemos que $\alpha_3(0) = \lambda_1 > 0$ y $\alpha_4(0) = \lambda_2 > 0$. Supongamos que existe $t_k \in [0, 1]$ tal que $\alpha_3(t_k) < 0$: entonces por ser $\alpha_3(t)$ una función continua existe $t_j \in [0, t_k]$ tal que $\alpha_3(t_j) = 0$, lo cual es una clara contradicción. Usando un razonamiento similar para $\alpha_4(t)$ podemos decir que $\alpha_3(t)$ y $\alpha_4(t)$ nunca toman valores no positivos.

Caso (ii): Considerando la factorización del polinomio característico,

$$f(\lambda; t) = a_0(\lambda - \alpha_1(t))(\lambda - \alpha_2(t))g(\lambda; t) = 0.$$

donde

$$g(\lambda, t) = (\lambda - \alpha_3(t))(\lambda - \alpha_4(t)).$$

Desarrollando se obtiene:

$$g(\lambda, t) = \lambda^2 + \lambda(-\alpha_3(t) - \alpha_4(t)) + \alpha_3(t)\alpha_4(t). \quad (2.11)$$

El discriminante de este polinomio es,

$$\Delta(t) = (-\alpha_3(t) - \alpha_4(t))^2 - 4\alpha_3(t)\alpha_4(t) = (\alpha_3(t) - \alpha_4(t))^2.$$

Si $\alpha_3(t) = \hat{d}(t) + i\hat{e}(t)$ y $\alpha_4(t) = \hat{d}(t) - i\hat{e}(t)$ se cumple que $\Delta(t) = -2(\hat{e}(t))^2$ es una función real. Tomando $t = 0$ vemos que $\Delta(0) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$ y desarrollándolo para $t = t_0$ se cumple que $\Delta(t_0) = (\hat{d}(t_0) + i\hat{e}(t_0) - (\hat{d}(t_0) - i\hat{e}(t_0)))^2 = -(2\hat{e}(t_0))^2 < 0$.

Por ser $\Delta(t)$ la suma y producto de funciones continuas podemos afirmar que $\Delta(t)$ también es una función continua. Entonces podemos afirmar que el conjunto $\mathcal{C} = \{t \in [0, 1] : \Delta(t) = 0\}$. Por ser un conjunto formado por las raíces de un polinomio este conjunto es finito y en consecuencia tiene mínimo. Entonces existe un $t_{min} \in \mathcal{C}$ tal que $\Delta(t_{min}) = 0$. En consecuencia la función $g(\lambda; t_{min})$ tiene una raíz real doble que es $\frac{\alpha_3(t_{min}) + \alpha_4(t_{min})}{2}$ y $\alpha_3(t_{min}) = \alpha_4(t_{min})$ es la raíz doble. La posibilidad de que $\alpha_3(t_{min}) = \alpha_4(t_{min}) \leq 0$ queda imposibilitada gracias al caso (i). Y si $\alpha_3(t_{min}) = \alpha_4(t_{min}) > 0$, por el Lema 2.5, nos encontraríamos con que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}(t_{min}) \neq \emptyset$, es decir, el elipsoide \mathcal{A} y la esfera $\mathcal{B}(t_{min})$ tendrían al menos un punto en común violando la hipótesis de que \mathcal{A} y $\mathcal{B}(t)$ están separados para todo $t \in [0, 1]$. Por tanto, como no existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\Delta(t_0) < 0$, no puede haber un par de raíces imaginarias conjugadas que sean solución de la ecuación (2.11) y por tanto, en el caso (ii) es imposible.

Podemos afirmar entonces que $\Delta(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$ concluyendo que $\alpha_3(t)$ y $\alpha_4(t)$ son raíces positivas distintas para todo $t \in [0, 1]$. \square

Los dos lemas siguientes nos ayudarán a demostrar el teorema principal de este trabajo.

Lema 2.6 *Si \mathcal{A} y \mathcal{B} tiene al menos un punto interior común entonces $f(\lambda)$ no tiene raíces reales positivas.*

Demostración. Sea $X_0 = (x_0, y_0, z_0, 1)^T$ un punto interior común a \mathcal{A} y \mathcal{B} . Por tanto se cumple que $X_0^T A X_0 < 0$ y $X_0^T B X_0 < 0$. Razonando por reducción al absurdo, suponemos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $f(\lambda_0) = \det(\lambda_0 A + B) = 0$. Entonces, $X_0^T (\lambda_0 A + B) X_0 = \lambda_0 X_0^T A X_0 + X_0^T B X_0 < 0$. Situación que podemos observar en la siguiente figura.

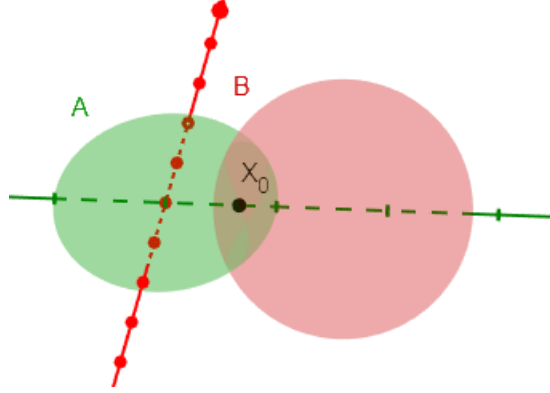


Figura 2.2: Imagen construida con Geogebra3D.

Tomando $X_1 = (x_1, y_1, z_1)^T \neq (0, 0, 0, 0)$ como un vector director genérico, podemos construir la recta siguiente,

$$X(t) = X_0 + tX_1 = (x_0, y_0, z_0, 1) + t(x_1, y_1, z_1, 0) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Vamos a estudiar la relación entre los puntos de la recta $X(t)$ con $\lambda A + B$. Para ello construimos,

$$X(t)^T(\lambda_0 A + B)X(t) = \lambda_0 X(t)^T A X(t) + X(t)^T B X(t)$$

Ahora por ser la recta infinita y ser A y B dos lugares geométricos finitos y cerrados, sabemos que existe un $t_k \in \mathbb{R}$ tal que $X(t_k)$ esta fuera de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Es decir,

$$X(t_k)^T \lambda_0 A X(t_k)^T > 0 \text{ y } X(t_k)^T B X(t_k)^T > 0$$

Entonces podemos afirmar que

$$X(t_k)^T(\lambda_0 A + B)X(t_k)^T > 0$$

Por lo que X_0 es un punto interior de \mathcal{A} y \mathcal{B} y $X(t_k)$ un punto exterior. Se cumple entonces que existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$X(t_1)^T \lambda_0 A X(t_1) = 0 \quad X(t_2)^T \lambda_0 A X(t_2) = 0.$$

$$X(t_1)^T B X(t_1) = 0 \quad X(t_2)^T B X(t_2) = 0.$$

Apoyándonos en las ecuaciones anteriores podemos afirmar entonces que,

$$X(t_1)^T \lambda_0 A X(t_1) + X(t_1)^T B X(t_1) = X(t_1)^T(\lambda_0 A + B)X(t_1) = 0.$$

$$X(t_2)^T \lambda_0 A X(t_2) + X(t_2)^T B X(t_2) = X(t_2)^T(\lambda_0 A + B)X(t_2) = 0.$$

Gráficamente, esto significa lo siguiente:

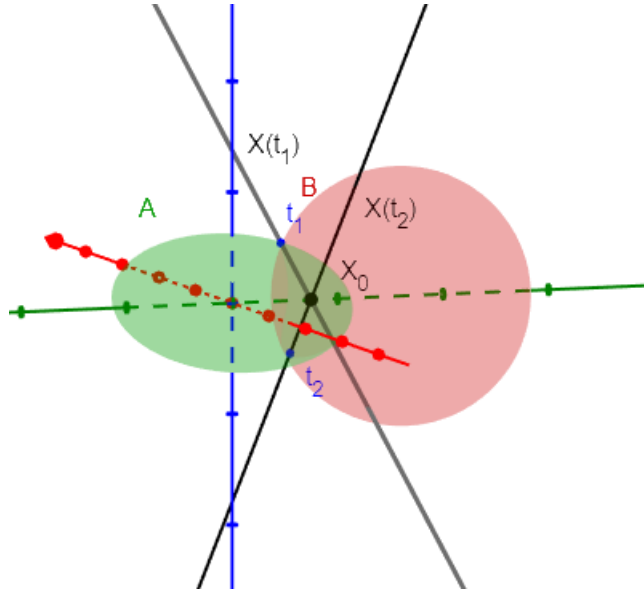


Figura 2.3: Imagen construida con Geogebra3D.

Por un lado sea $X = (x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^4$, la cuádrica queda definida como $X^T(\lambda_0 A + B)X = 0$, siendo dicha superficie cerrada en E^3 . Por otro lado $X^T(\lambda_0 A + B)X = 0$ es una cuádrica a la cual $X(t)$ corta siempre en dos puntos. Podemos afirmar entonces, por las propiedades de las cuádricas, que $X^T(\lambda_0 A + B)X = 0$ solo puede ser un elipsoide.

Se cumple, por definición de elipsoide que $\det(\lambda_0 A + B) < 0$ y por tanto $\det(\lambda_0 A + B) \neq 0$, contradiciendo la hipótesis de que λ_0 era raíz de la ecuación característica. En consecuencia la ecuación característica $f(\lambda) = 0$ no tiene raíces positivas. \square

Lema 2.7 *Si dos elipsoides son tangentes exteriormente entonces su ecuación características tiene una raíz doble positiva.*

Demostración. Primero vamos a ver que hay una raíz de $f(\lambda) = 0$. Sean $\mathcal{A} : X^T A X = 0$ y $\mathcal{B} : X^T B X = 0$ dos elipsoides tangentes exteriormente en un punto que denotamos como X_0 . Podemos construir los planos tangentes a \mathcal{A} y \mathcal{B} en X_0 que respectivamente son $\pi_1 : X_0^T A X = 0$ y $\pi_2 : X_0^T B X = 0$ con $X = (x_1, y_1, z_1, 1)$. Como los planos π_1 y π_2 son el mismo, se cumple que sus vectores normales son proporcionales, por tanto existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que,

$$B X_0 = -\lambda_0 A X_0 \quad \text{y} \quad (\lambda_0 A + B) X_0 = 0, \quad \text{con } X_0 \neq (0, 0, 0, 0). \quad (2.12)$$

Como $(\lambda_0 A + B) X_0 = 0$ podemos afirmar que $X_0 \in \text{Ker}[\lambda_0 A + B]$ i.e. $\text{rang}(\text{Ker}[\lambda_0 A + B]) > 0$. Entonces por el Teorema de las dimensiones tenemos que $\text{rang}(\lambda_0 A + B) < 4$, por tanto $\det(\lambda_0 A + B) = 0$. En consecuencia λ_0 es raíz de $f(\lambda) = 0$. Sea Y_0 un punto interior de \mathcal{B} entonces Y_0 será un punto exterior de \mathcal{A} . Algebraicamente expresado, tenemos que,

$$Y_0^T A Y_0 > 0, \quad (2.13)$$

$$Y_0^T B Y_0 < 0. \quad (2.14)$$

Construimos una recta r que pase por X_0 e Y_0 . Sean $U_0 = r \cap \mathcal{A}$ con $U_0 \neq X_0$ y $V_0 = r \cap \mathcal{B}$ con $V_0 \neq X_0$. Observemoslo gráficamente,

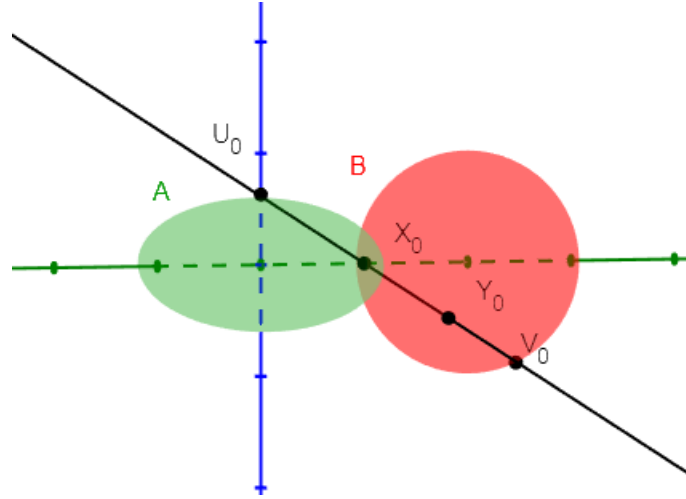


Figura 2.4: Imagen construida con Geogebra3D.

También podemos expresar U_0 como $U_0 = (1 - s)X_0 + sY_0$ para algún $s < 0$ y V_0 como $V_0 = (1 - t)X_0 + tY_0$ para algún $t > 0$. Partiendo de que $U_0 \in \mathcal{A}$ y $V_0 \in \mathcal{B}$ respectivamente,

$$0 = U_0^T A U_0 = ((1 - s)X_0 + sY_0)^T A ((1 - s)X_0 + sY_0).$$

Ordenando, por ser $s < 0$ y gracias a la ecuación (2.13) se tiene,

$$Y_0^T A X_0 = \frac{-sY_0^T A Y_0}{2(1 - s)} > 0. \quad (2.15)$$

Razonando análogamente para $V_0 = (1 - t)X_0 + tY_0$,

$$0 = V_0^T B V_0 = ((1 - t)X_0 + tY_0)^T A ((1 - t)X_0 + tY_0).$$

Ordenando, por ser $t > 1$ y gracias a la ecuación (2.14),

$$Y_0^T B X_0 = \frac{-tY_0^T B Y_0}{2(1 - t)} < 0. \quad (2.16)$$

Sabiendo que $(\lambda_0 A + B)X_0 = 0$ y multiplicando a izquierda por Y_0^T ,

$$0 = Y_0^T (\lambda_0 A + B) X_0 = \lambda_0 Y_0^T A X_0 + Y_0^T B X_0.$$

Finalmente, despejando λ_0 y ayudandonos de las ecuaciones (2.15) y (2.16) se obtiene,

$$\lambda_0 = \frac{-Y_0^T B X_0}{Y_0^T A X_0} > 0. \quad (2.17)$$

Sabemos que la ecuación característica $\det(\lambda A + B) = 0$ tiene la siguiente estructura,

$$-\frac{\lambda^4}{(abc)^2} + \dots + (-r^2) = 0.$$

Transformando la ecuación en una ecuación mónica,

$$\lambda^4 + \dots + (abc)^2 = 0. \quad (2.18)$$

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_0, \lambda_1$ las cuatro raíces de $f(\lambda)$. Entonces $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 = (abc)^2 > 0$. Por el Teorema 2.2 sabemos que $\varepsilon_1 < 0$ y $\varepsilon_2 < 0$. Respecto a ε_1 y ε_2 mencionar que no tienen por qué ser diferentes. También sabemos por la ecuación (2.17) que $\lambda_0 > 0$ y por ser el coeficiente constante de la ecuación (2.18) positivo, tenemos que $\lambda_1 > 0$. Ahora ya hemos probado que tenemos dos raíces positivas. Veamos ahora que dichas raíces son la misma. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\lambda_0 \neq \lambda_1$. Por ser λ_0 y λ_1 raíces de $f(\lambda) = 0$ se cumple que λ_0 y λ_1 son autovalores de la matriz $-A^{-1}B$, como ya vimos en la demostración del Lema 2.5. Sabemos que X_0 es un autovector asociado a λ_0 y X_1 el autovector asociado a λ_1 , por ser autovectores asociados a distintos autovalores podemos decir que son linealmente independientes. Entonces,

$$(\lambda_1 I - (-A^{-1}B))X_1 = 0.$$

Multiplicando por A a izquierda, se obtiene

$$(\lambda_1 A + B)X_1 = 0 \tag{2.19}$$

Por un lado usando la ecuación (2.12) y sabiendo que $(\lambda A + B) = (\lambda A + B)^T$ se tiene que,

$$X_0^T (\lambda_0 A + B) = 0.$$

Multiplicando por X_1 a la derecha,

$$X_0^T (\lambda_0 A + B)X_1 = 0. \tag{2.20}$$

Por otro lado usando la ecuación (2.19) y conociendo que $(\lambda A + B) = (\lambda A + B)^T$ se tiene que,

$$X_1^T (\lambda_1 A + B) = 0.$$

Multiplicando por X_0 a derecha,

$$X_0^T (\lambda_1 A + B)X_1 = 0. \tag{2.21}$$

Desarrollando las ecuaciones (2.20) y (2.21) respectivamente,

$$\lambda_0 X_0^T A X_1 + X_0^T B X_1 = 0.$$

$$\lambda_1 X_0^T A X_1 + X_0^T B X_1 = 0.$$

Tomando $X_0^T A X_1 = \alpha$ y $X_0^T B X_1 = \beta$ tenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones,

$$\lambda_0 \alpha + \beta = 0.$$

$$\lambda_1 \alpha + \beta = 0.$$

Como por hipótesis $\lambda_0 \neq \lambda_1$,

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces el sistema es compatible determinado y tiene una única solución, la trivial. Por tanto $\alpha = \beta = X_0^T A X_1 = X_0^T B X_1 = 0$. Como $X_0^T A X_1 = 0$ y $X_0^T B X_1 = 0$ tenemos que X_1 es un punto de los planos tangentes $\pi_1 \equiv \pi_2$. Pero claramente X_1 no está en \mathcal{A} ni en \mathcal{B} , puesto que $\pi_1 \cap \mathcal{A} = \{X_0\}$ y $\pi_1 \cap \mathcal{B} = \{X_0\}$. Podemos afirmar que $X_0 \neq X_1$ por ser autovectores asociados a diferentes autovalores. La siguiente gráfica ilustra la demostración:

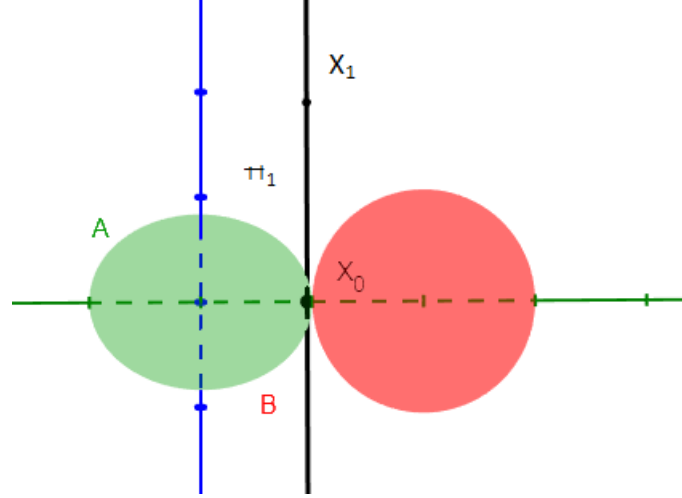


Figura 2.5: Figura construida con Geogebra3D.

Por un lado podemos hacer notar que $X_1^T A X_1 > 0$ y $X_1^T B X_1 > 0$. Entonces es trivial que $\lambda_1 X_1^T A X_1 + X_1^T B X_1 > 0$. Por otro lado gracias a la ecuación (2.19) tenemos que $(\lambda_1 A + B)X_1 = 0$, multiplicando a izquierda por X_1^T y sabiendo que, por hipótesis, $\lambda_1 > 0$ obtenemos que $X_1^T(\lambda_1 A + B)X_1 = 0$, lo que es una clara contradicción.

Por tanto $\lambda_0 = \lambda_1 > 0$, es decir $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz doble y positiva. \square

2.3. Teorema Fundamental.

Una vez enunciados y demostrados los lemas y teoremas precedentes, ya podemos presentar el teorema central de este capítulo.

Teorema 2.8 Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipsoides con ecuación característica $f(\lambda) = 0$. Entonces,

\mathcal{A} y \mathcal{B} están separados si y solo si $f(\lambda) = 0$ tiene dos raíces reales positivas distintas.

\mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes exteriormente si y solo si $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz real positiva doble.

Demostración. Comencemos demostrando la primera equivalencia. Supongamos que \mathcal{A} y \mathcal{B} están separados.

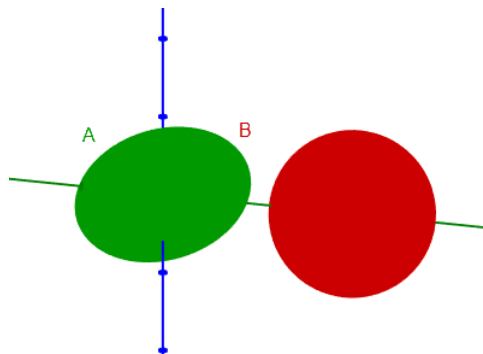


Figura 2.6: Imagen construida con Geogebra3D.

Entonces empleando el Teorema 3.4 directamente podemos afirmar que $f(\lambda) = 0$ tiene dos raíces reales positivas y distintas.

Demostremos la otra implicación. Supongamos que $f(\lambda)$ tiene dos raíces reales positivas y distintas. Por un lado apoyándonos en el Lema 2.6 sabemos que \mathcal{A} y \mathcal{B} no tienen puntos interiores en común. Por otro lado gracias al Lema 2.7 sabemos que no hay puntos en los que \mathcal{A} y \mathcal{B} sean tangentes. Concluimos entonces que ambos elipsoides están separados.

Vamos a probar ahora la segunda equivalencia. Supongamos primero que \mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes exteriormente.

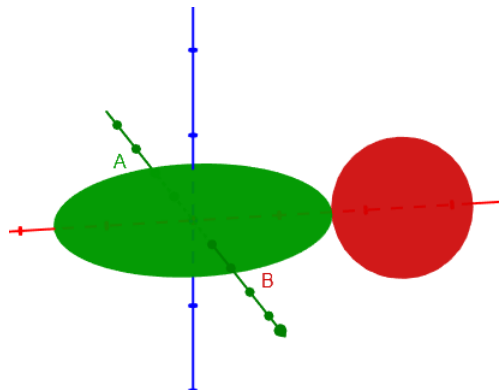


Figura 2.7: Imagen construida con Geogebra3D.

Entonces por el Lema 2.7 podemos asegurar que la ecuación $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz doble positiva.

Para la implicación recíproca supongamos que la ecuación $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz doble real positiva. Aplicando el Lema 2.5 podemos afirmar que \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen un único punto en común.

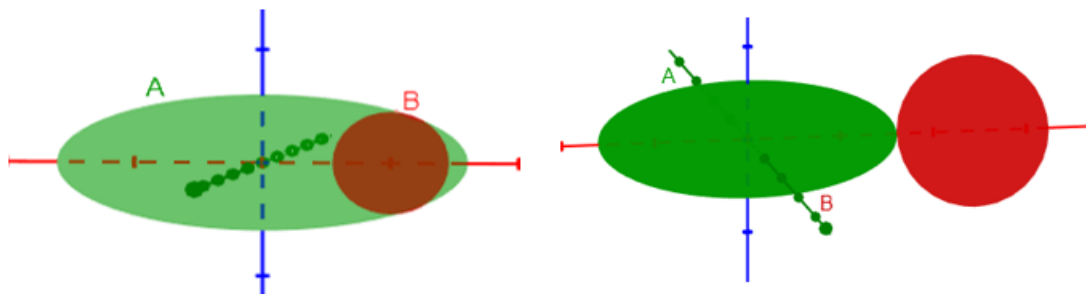


Figura 2.8: Imagen construida con Geogebra3D.

Supongamos que dicho punto es un punto interior. Entonces aplicando El Lema 2.6 tendríamos que la ecuación $f(\lambda) = 0$ no tiene raíces reales positivas. Llegando a una contradicción y, en consecuencia, el punto en común de \mathcal{A} y \mathcal{B} tendrá que ser un punto exterior. Y por tanto los elipsoides se tocan externamente de forma tangencial. \square

Capítulo 3

Cónicas. Separación de elipses.

En este tercer capítulo abordaremos los lemas y teoremas del artículo [8] desde otra perspectiva. Plantearemos los resultados que dicho artículo presenta adaptandolos al estudio de la posición relativa de dos elipses cualesquiera. Indicar que hay partes del desarrollo de algunas de las demsotraciones que se presentan a continuación que son muy similares al caso tridimensional.

3.1. Preámbulo.

En este nuevo problema que afrontamos nos encontramos con dos elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} situadas en cualquier región del plano. Análogamente al problema tratado en el capítulo anterior, transformaremos dichas elipses para que la ecuación característica sea mas fácil de analizar. Así el centro de la elipse \mathcal{A} se situa sobre el origen de coordenadas y sus ejes sobre los ejes de coordenadas. Una vez que nos encontramos en esta situación por medio de una homotecia transformamos la elipse \mathcal{B} en una circunferencia, deformando también la elipse \mathcal{A} pero sin desplazarla ni cambiar sus ejes. En consecuencia de lo anteriormente mencionado tenemos la elipse \mathcal{A} y la circunferencia \mathcal{B} con sus ecuaciones siguientes;

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = X^T A X = 0, \quad 0 < a \leq b \\ \mathcal{B}: \quad & (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = X^T B X = 0 \quad , r > 0 \\ & X = (x, y, 1).\end{aligned}$$

Por un lado la matriz que define la elipse es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, por otro lado, la matriz que define la circunferencia es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ -x_c & -y_c & -r^2 + x_c^2 + y_c^2 \end{pmatrix}.$$

Definimos nuevamente el polinomio característico de \mathcal{A} y \mathcal{B} como,

$$f(\lambda) = \det(\lambda A + B).$$

En este capítulo el polinomio característico presenta la siguiente estructura:

$$f(\lambda) = - \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) (\lambda + r^2 - x_c^2 - y_c^2) - x_c^2 \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right) - y_c^2 \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \quad (3.1)$$

Tomando este polinomio como punto de partida vamos a ir desarrollando un conjunto de lemas y teoremas que nos permita caracterizar la posición relativa entre \mathcal{A} y \mathcal{B} en función del signo de sus raíces reales.

Lema 3.1 *Asumiendo que $0 < a < b$ se cumple que,*

- (1) $f(0) < 0$.
- (2) $f(-a^2) < 0$ si $x_c \neq 0$ y $f(-a^2) = 0$ si $x_c = 0$.
- (3) $f(-b^2) > 0$ si $y_c \neq 0$ y $f(-b^2) = 0$ si $y_c = 0$.

Demostración. Partiendo de $r, x_c, y_c \in \mathbb{R}$ y $0 < a < b$, se tiene:

- (1) $f(0) = -r^2 < 0$.
- (2) Evaluando $-a^2$ en la función $f(\lambda)$:

$$f(-a^2) = -x_c^2 \left(-\frac{a^2}{b^2} + 1 \right).$$

Por un lado $b > a$ por tanto $b^2 > a^2$ y claramente entonces $-\frac{a^2}{b^2} + 1 > 0$. Concluimos así que

$$f(-a^2) = -x_c^2 \left(\frac{-a^2}{b^2} + 1 \right) < 0.$$

Por otro lado si $x_c^2 = 0$ se cumple que $f(-a^2) = 0$.

- (3) Sustituyendo $-b^2$ en $f(\lambda)$:

$$f(-b^2) = -y_c^2 \left(\frac{-b^2}{a^2} + 1 \right).$$

Nuevamente vemos como $b > a$ y por tanto $b^2 > a^2$ cumpliéndose que:

$$f(-b^2) = -y_c^2 \left(\frac{-b^2}{a^2} + 1 \right) > 0.$$

Y por último es inmediato ver que si $y_c = 0$ se tiene que $f(-b^2) = 0$. \square

Teorema 3.2 *Si $0 < a \leq b$, entonces se cumple que $f(\lambda)$ tiene al menos una raíz negativa y real en $[-b^2, -a^2]$.*

Demostración. Como consecuencia del Lema 3.1 sabemos que $f(-b^2) > 0$ y $f(-a^2) < 0$ y como f es un polinomio, entonces en $[-b^2, -a^2]$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. \square

Lema 3.3 *Todo factor común no constante a todos los menores 2×2 de la matriz $\lambda A + B$ ha de ser $\lambda + a^2$, $\lambda + b^2$.*

Demostración. Es suficiente ver que el primer menor $\det[(\lambda A + B)(1, 2 | 1, 2)]$ es

$$\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right). \quad \square$$

3.2. Caracterización de la posición relativa de dos elipses.

A continuación se muestran las condiciones necesarias para la separación de las dos elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Teorema 3.4 *Si \mathcal{A} y \mathcal{B} están separadas entonces $f(\lambda) = 0$ tiene dos raíces reales, positivas y distintas.*

Para la demostración del teorema anterior, necesitamos probar previamente el siguiente lema.

Lema 3.5 *Si $f(\lambda)$ tiene una raíz positiva doble entonces las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes en un punto.*

Demostración. Sea λ_0 una raíz doble positiva del polinomio $f(\lambda)$. Entonces $\det(\lambda_0 A + B) = 0$. Apoyándonos en el Lema 3.3 se cumple que λ_0 no es raíz de ninguna submatriz 2×2 de $\lambda A + B$ puesto que

$$\det[(\lambda_0 A + B)(1, 2|1, 2)] = \left(\frac{\lambda_0}{a^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda_0}{b^2} + 1\right) > 0.$$

Como $0 < a < b$ y $\lambda_0 > 0$. Podemos afirmar que $\text{rang}[\lambda_0 A + B] = 2$ y por el Teorema de las Dimensiones se tiene que $\dim(\text{Ker}[\lambda_0 A + B]) = 1$. Volviendo a emplear las descomposiciones usadas en la demostración de el Lema 2.5 tenemos que,

$$\lambda A + B = A(\lambda I - (-A^{-1}B)).$$

Como \mathcal{A} es una elipse se cumple que $\det(A) < 0$. Entonces por un lado tenemos que al ser λ_0 raíz doble de $\det(\lambda A + B)$ se tiene que también es raíz doble de $\det(A(\lambda I - (-A^{-1}B)))$. En consecuencia de la descomposición matricial anterior tenemos por otro lado que $\text{Ker}[\lambda A + B] = \text{Ker}[A(\lambda I - (-A^{-1}B))]$ y por tanto $\dim(\text{Ker}[A(\lambda I - (-A^{-1}B))]) = 1$. Debemos hacer notar que $\text{Ker}[A(\lambda I - (-A^{-1}B))] \neq \emptyset$. Por tanto existe un autovector X_0 de la matriz $-A^{-1}B$ asociado a λ_0 . Construyendo dicho vector de acuerdo a [9, pág 380-381] sabemos que existe una matriz M tal que $J = M^{-1}(-A^{-1}B)M$ donde J sea la matriz de la Forma Canónica de Jordan de $-A^{-1}B$. Puede ocurrir que se logre que J sea una matriz diagonal o que este objetivo no se alcance y la matriz $-A^{-1}B$ no se pueda diagonalizar. Usando las ecuaciones que relacionan a los autovalores λ_i con los autovectores X_i ,

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad i \in 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

$$AX_i = \lambda_i X_{i+1} \quad i \in 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.3)$$

donde m es la multiplicidad del autovalor λ_i . Empleando la ecuación (3.2) a nuestro caso se tiene,

$$-A^{-1}BX_0 = \lambda_0 X_0 \quad \text{y} \quad A^{-1}BX_0 = -\lambda_0 X_0. \quad (3.4)$$

Si X_1 es un autovector cualquiera de $-A^{-1}B$, entonces usando la ecuación (3.3) se tiene,

$$A^{-1}BX_1 = -\lambda_0 X_1 + X_0. \quad (3.5)$$

Despejando las ecuaciones (3.3) y (3.4) respectivamente se obtiene,

$$(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_0 = 0. \quad (3.6)$$

$$(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_1 = X_0. \quad (3.7)$$

Por un lado tenemos que multiplicando la ecuación (3.7) por $\lambda_0 I + A^{-1}B$ y de acuerdo con la ecuación (3.6) se tiene:

$$(\lambda_0 I + A^{-1}B)^2 X_1 = (\lambda_0 I + A^{-1}B)X_0 = 0.$$

Por otro lado, haciendo la transpuesta en la ecuación (3.7) y sabiendo que las matrices A , B y A^{-1} son simétricas podemos concluir:

$$X_0^T = X_1^T(\lambda_0 I + BA^{-1}).$$

Multiplicando por A a derecha:

$$X_0^T A = X_1^T(\lambda_0 I + BA^{-1})A,$$

y desarrollando el lado derecho de la ecuación, se tiene:

$$X_1^T(\lambda_0 I + BA^{-1})A = X_1^T(\lambda_0 A + B) = X_1^T AA^{-1}(\lambda_0 A + B) = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B).$$

En resumen tenemos,

$$X_0^T A = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B).$$

Multiplicando por X_0 a derecha se tiene

$$X_0^T A X_0 = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_0 = 0.$$

Sabemos que la ecuación anterior es nula por la ecuación (3.6). Ahora aplicando la igualdad de la ecuación (3.7) a X_0 llegamos a:

$$X_0^T A X_0 = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B)(\lambda_0 I + A^{-1}B)X_1 = 0.$$

Agrupando se obtiene,

$$X_0^T A X_0 = X_1^T A(\lambda_0 I + A^{-1}B)^2 X_1 = 0. \quad (3.8)$$

Como conclusión obtenemos la igualdad de la ecuación (3.8). Donde hemos probado que X_0 es un punto de la elipse \mathcal{A} . Actuando de manera análoga se prueba que X_0 también es un punto de la elipse \mathcal{B} . Por definición de rectas tangentes, y por ser X_0 un punto de \mathcal{A} y de \mathcal{B} , tenemos que $r_1 : X^T A X_0 = 0$ y $r_2 : X^T B X_0 = 0$ son las rectas tangentes a \mathcal{A} y \mathcal{B} en X_0 respectivamente. Gracias a la ecuación (3.4) es fácil ver que $-\lambda_0 A X_0 = B X_0$. Por ello los vectores directores de r_1 y r_2 son proporcionales y como además ambas rectas tienen un punto en común podemos concluir que $r_1 \equiv r_2$. Es decir ambas rectas son idénticas. Concluimos entonces que \mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes en el punto X_0 . \square

Analicemos a continuación la demostración del Teorema ??

Demostración. Se construye una circunferencia \mathcal{B}_0 con radio $r > 0$ y centro $(a + r + 1, 0)$. La matriz de esta circunferencia es la siguiente:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(a + r + 1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(a + r + 1) & 0 & a^2 + 2ar + 2r + 2a + 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $f_0(\lambda)$ el polinomio característica de \mathcal{A} y \mathcal{B}_0 , $f_0(\lambda) = \det(\lambda A + B_0)$, notamos que:

$$f_0(\lambda) = -\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right)\left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right)(\lambda + r^2 - (r + a + 1)^2) + (a + r + 1)^2\left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right).$$

Sacando factor común, la ecuación característica queda,

$$\left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) \left((a+r+1)^2 - \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) (\lambda + r^2 - (r+a+1)^2)\right) = 0$$

Así $-b^2$ es una raíz real y negativa de $f(\lambda)$. Ahora vamos a estudiar la otra parte de la ecuación característica para hallar las otras dos raíces restantes:

$$f_1(\lambda) = \left((a+r+1)^2 - \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) (\lambda + r^2 - (r+a+1)^2)\right).$$

Desarrollando la ecuación obtenemos

$$\lambda^2 + \lambda(-2r - 2a - 2ar - 1) - 2a^2(a^2 + 2a + 2r + 2ar + 1) - a^2r^2 = 0. \quad (3.9)$$

Nombrando los coeficientes del polinomio tal que:

$$f_1(\lambda) = \hat{a}\lambda^2 + \hat{b}\lambda + \hat{c}$$

se tiene que:

- $\hat{b} = -(2r + 2a + 2ar + 1) < 0$.
- $\hat{c} = -4a^2r^2$.

Gracias a que $a > 0$ y $r > 0$ queda patente que $\hat{b} < 0$ y que $\hat{c} < 0$. Denotando al discriminante de la ecuación $f_1(\lambda) = 0$ como δ entonces $\delta = \hat{b}^2 - 4\hat{c}$. Desarrollando se tiene

$$\delta = 4a^2r^2 + 8ar^2 + 8a^2r + 4r^2 + 12ar + 4a^2 + 4r + 4a + 1 - 4a^2r^2 > 0. \quad (3.10)$$

Observamos entonces que $\delta > 0$. Por tanto las dos raíces de la ecuación $f_1(\lambda) = 0$ son reales. Vamos a estudiar, el signo de estas raíces:

- La primera raíz es $\lambda_1 = \frac{-\hat{b} + \sqrt{\delta}}{2} > 0$, gracias ala ecuación 3.10 y sabiendo que $\hat{b} < 0$.
- La segunda raíz es $\lambda_2 = \frac{-\hat{b} - \sqrt{\delta}}{2}$, cuyo signo vamos a estudiar a continuación.

Es fácil observar que, $(2r + 2a + 2ar + 1) > \sqrt{(2r + 2a + 2ar + 1)^2 - 4a^2r^2}$ y se tiene por tanto que $\lambda_2 > 0$. Cumpliendose entonces que las dos raíces están en \mathbb{R}^+ . Asimismo, puesto que $\delta > 0$, es sencillo ver que λ_1 y λ_2 son dos raíces que además de ser positivas y reales son distintas.

Sea \mathcal{B} una circunferencia cualquiera de radio r y separada de \mathcal{A} . Construimos una aplicación $B(t)$ de forma que nos vayamos trasladando de \mathcal{B} a \mathcal{B}_0 , sin tocar \mathcal{A} en ningún momento. Se tiene que $B(0) = \mathcal{B}_0$, $B(1) = \mathcal{B}$ y $B(t) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, para todo $t \in [0, 1]$. Cabe destacar que nuevamente dicha aplicación puede construirse como la composición de dos aplicaciones afines $h \circ g$ o como una aplicación no afín B elegida adecuadamente. La siguiente ilustración esclarece la construcción,

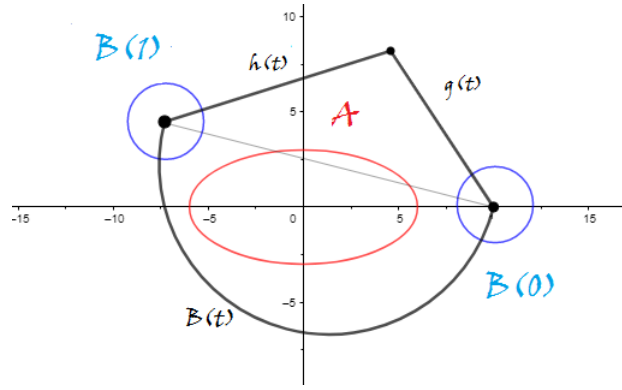


Figura 3.1: Imagen construida con Geogebra.

Ahora podemos definir la función $f(\lambda; t) = 0$ que es la ecuación característica construida a partir de \mathcal{A} y $B(t)$ para $t \in [0, 1]$. Por el Teorema 3.2 sabemos que la ecuación tiene una raíz real negativa. Debemos probar que para todo $t \in [0, 1]$ la ecuación característica $f(\lambda; t) = 0$ tiene otras dos raíces distintas y positivas. Para tratar la continuidad de las raíces de un polinomio nos apoyamos en [10, pág 152-155]. Tomamos $a_j(t), 1 \leq j \leq n$, funciones complejas y continuas, definidas en un intervalo I . Entonces podemos tomar otras funciones complejas debidamente escogidas tal que $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ sean las raíces de la ecuación:

$$\lambda^n - a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n(t) = 0.$$

Centrándonos en nuestro caso particular donde $n = 3$ la ecuación característica queda definida como,

$$f(\lambda; t) = -\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) (\lambda + r^2) + \frac{x_c^2(t)}{a^2} \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) \lambda + \frac{y_c^2(t)}{b^2} \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) \lambda = 0.$$

Vemos que el coeficiente director es $-\frac{1}{a^2 b^2}$ que es diferente de 0 para todo $t \in [0, 1]$ por ser $0 < a \leq b$ y en consecuencia $\deg(f(\lambda, t)) = 3$.

Sean $\alpha_j(t), 1 \leq j \leq 3$ funciones continuas y complejas que escogidas debidamente constituyen las tres raíces de $f(\lambda; t) = 0$. Hemos visto previamente que tomando $t = 0$ la ecuación $f(\lambda; 0) = 0$ tiene dos raíces positivas reales distintas y otra raíz real negativa. Podemos afirmar que $\alpha_1(0) = -b^2 < 0 < \alpha_2(0) = \lambda_1 < \alpha_3(0) = \lambda_2$. En primer lugar para $f(\lambda; t) = 0$ tenemos que, según el Teorema 3.2, $\alpha_1(t)$ es una raíz negativa para todo $t \in [0, 1]$. En segundo lugar, debemos probar que $\alpha_2(t)$ y $\alpha_3(t)$ son raíces reales positivas, y distintas para todo $t \in [0, 1]$.

Para ello procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe algún $t_0 \in [0, 1]$ tal que $f(\lambda, t_0) = 0$ no tiene dos raíces positivas distintas. Entonces nos pueden ocurrir dos casos,

- (i) Que $\alpha_2(t_0)$ o $\alpha_3(t_0)$ sea una raíz real no positiva, 0 o ∞ sin llegar a ser una raíz imaginaria.
- (ii) Las raíces $\alpha_2(t_0)$ y $\alpha_3(t_0)$ son un par de raíces conjugadas imaginarias (no reales).

Caso (i). Por un lado hemos dicho anteriormente que podemos escribir $f(t; \lambda) = 0$ como

$$\frac{-\lambda^3}{(ab)^2} + a_2(t)\lambda^2 + a_1(t)\lambda + (-r^2) = 0.$$

Donde $\frac{-1}{(ab)^2} < 0$ y $-r^2 < 0$. Como el denominador del coeficiente director no se anula para ningún valor puesto que a y b son positivos, se tiene que la función no toma valores infinitos. Además también sabemos que no existe $t_k \in [0, 1]$ tal que $\alpha_3(t_k) = 0$ ya que, en dicha situación, nos encontraríamos con que,

$$a(\lambda - \alpha_1(t_k))(\lambda - \alpha_2(t_k))\lambda = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Y eso no puede ocurrir puesto que el coeficiente constante es diferente de cero para todo $t \in [0, 1]$. Por otro lado sabemos por [10, pág. 152-155] que $\alpha_2(t)$ y $\alpha_3(t)$ son dos funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$. También sabemos que $\alpha_2(0) = \lambda_1 > 0$ y $\alpha_3(0) = \lambda_2 > 0$. Supongamos que existe $t_k \in [0, 1]$ tal que $\alpha_3(t_k) < 0$. Entonces por ser $\alpha_3(t)$ una función continua, existe $t_j \in [0, t_k]$ tal que $\alpha_3(t_j) = 0$. Lo cual es una clara contradicción. Por un razonamiento análogo para $\alpha_3(t)$ podemos decir que $\alpha_2(t)$ y $\alpha_3(t)$ nunca toman valores no positivos.

Caso (ii). Consideramos la factorización del polinomio característico:

$$f(\lambda; t) = a_0(\lambda - \alpha_1(t))g(\lambda; t)$$

donde $g(\lambda, t) = (\lambda - \alpha_2(t))(\lambda - \alpha_3(t))$. Dicho polinomio es

$$g(\lambda, t) = \lambda^2 + \lambda(-\alpha_2(t) - \alpha_3(t)) + \alpha_2(t)\alpha_3(t), \quad (3.11)$$

y su discriminante es,

$$\Delta(t) = (-\alpha_2(t) - \alpha_3(t))^2 - 4\alpha_2(t)\alpha_3(t) = (\alpha_2(t) - \alpha_3(t))^2.$$

Sean $\alpha_2(t) = \hat{d}(t) + i\hat{e}(t)$ y $\alpha_3(t) = \hat{d}(t) - i\hat{e}(t)$. Tenemos que $\Delta(t) = -2(\hat{e}(t))^2$ es una función real. Tomando $t = 0$ vemos que $\Delta(0) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$ y desarrollándolo para $t = t_0$ se cumple que,

$$\Delta(t_0) = (\hat{d}(t_0) + i\hat{e}(t_0) - (\hat{d}(t_0) - i\hat{e}(t_0)))^2 = -(2\hat{e}(t_0))^2 < 0.$$

Por ser $\Delta(t)$ la suma y producto de funciones continuas podemos afirmar que $\Delta(t)$ también es una función continua. Entonces como el conjunto $\mathcal{C} = \{t \in [0, 1] : \Delta(t) = 0\} \neq \emptyset$ esta formado por las raíces de un polinomio, este conjunto es finito y en consecuencia tiene mínimo. Existe al menos un valor $t_{min} \in \mathcal{C}$ tal que $\Delta(t_{min}) = 0$. En consecuencia la función $g(\lambda; t_{min})$ tiene una raíz real doble que es $\frac{\alpha_2(t_{min}) + \alpha_3(t_{min})}{2}$ y $\alpha_2(t_{min}) = \alpha_3(t_{min})$ es la raíz doble. La posibilidad de que $\alpha_2(t_{min}) = \alpha_3(t_{min}) \leq 0$ queda imposibilitada gracias al caso (i). Y si $\alpha_2(t_{min}) = \alpha_3(t_{min}) > 0$, por el Lema 3.5, nos encontraríamos con que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}(t_{min}) \neq \emptyset$, es decir, el elipsoide de \mathcal{A} y la esfera $\mathcal{B}(t_{min})$ tendrían al menos un punto en común violando la hipótesis de que \mathcal{A} y $\mathcal{B}(t)$ están separados para todo $t \in [0, 1]$. Por tanto como no existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\Delta(t_0) < 0$ no puede haber un par de raíces imaginarias conjugadas que sean solución de la ecuación (3.11). Por tanto el caso (ii) es imposible. Podemos afirmar entonces que, $\Delta(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$, concluyendo que $\alpha_2(t)$ y $\alpha_3(t)$ son raíces positivas distintas para todo $t \in [0, 1]$.

Los dos lemas siguientes nos ayudarán con la demostración del teorema principal de este capítulo.

Lema 3.6 *Si \mathcal{A} y \mathcal{B} tiene al menos un punto interior común entonces $f(\lambda)$ no tiene raíces reales positivas.*

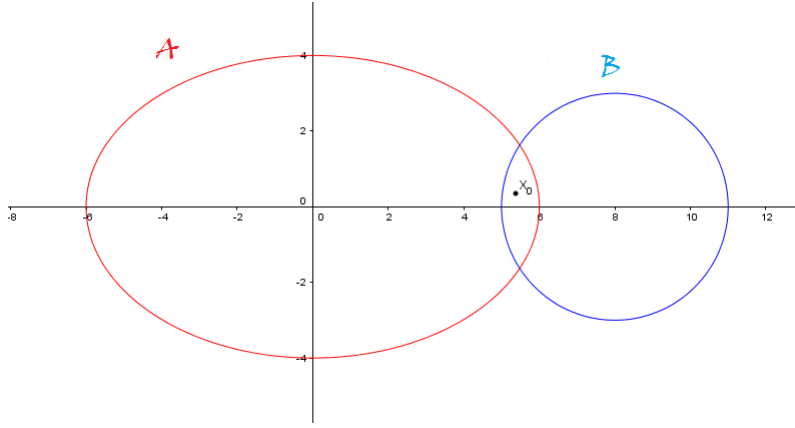


Figura 3.2: Figura construida con Geogebra.

Demostración. Sea $X_0 = (x_0, y_0)^T$ un punto interior de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Por tanto se tiene, $X_0^T A X_0 < 0$ y $X_0^T B X_0 < 0$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $f(\lambda_0) = \det(\lambda_0 A + B) = 0$. Entonces, $X_0^T (\lambda_0 A + B) X_0 = \lambda_0 X_0^T A X_0 + X_0^T B X_0 < 0$. Gráficamente se tiene:

Tomando $X_1 = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$ como un vector director genérico, podemos construir la recta siguiente,

$$X(t) = X_0 + tX_1 = (x_0, y_0, 1) + t(x_1, y_1, 0) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Vamos a estudiar la relación entre los puntos de la recta $X(t)$ y la cónica. Para ello construimos,

$$X(t)^T (\lambda_0 A + B) X(t) = \lambda_0 X(t)^T A X(t) + X(t)^T B X(t).$$

Ahora por ser la recta infinita, y ser \mathcal{A} y \mathcal{B} dos lugares geométricos cerrados y acotados sabemos que existe un $t_k \in \mathbb{R}$ tal que $X(t_k)$ esta fuera de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Es decir,

$$X(t_k)^T \lambda_0 A X(t_k)^T > 0 \text{ y } X(t_k)^T B X(t_k)^T > 0.$$

Entonces podemos afirmar que,

$$X(t_k)^T (\lambda_0 A + B) X(t_k)^T > 0$$

Sabemos que X_0 es un punto interior de \mathcal{A} y \mathcal{B} y $X(t_k)$ es un punto exterior. Se cumple entonces que existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$X(t_1)^T \lambda_0 A X(t_1) = 0 \quad X(t_2)^T \lambda_0 A X(t_2) = 0$$

$$X(t_1)^T B X(t_1) = 0 \quad X(t_2)^T B X(t_2) = 0$$

Ayudándonos en las ecuaciones anteriores podemos afirmar entonces que

$$X(t_1)^T \lambda_0 A X(t_1) + X(t_1)^T B X(t_1) = X(t_1)^T (\lambda_0 A + B) X(t_1) = 0$$

$$X(t_2)^T \lambda_0 A X(t_2) + X(t_2)^T B X(t_2) = X(t_2)^T (\lambda_0 A + B) X(t_2) = 0$$

Gráficamente se tiene

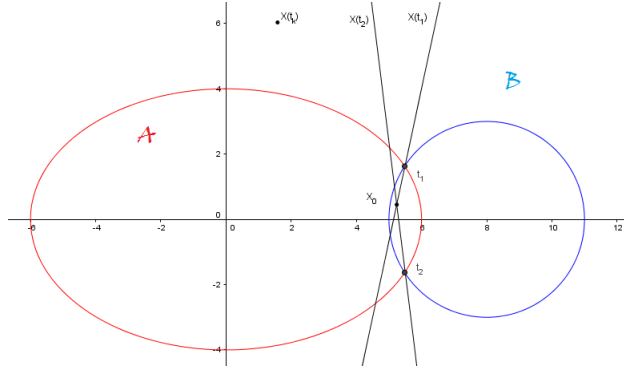


Figura 3.3: Imagen construida con Geogebra.

Si $X = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ entonces la cónica definida por $X^T(\lambda_0 A + B)X = 0$ es una curva cerrada en E^2 . Por otro lado $X^T(\lambda_0 A + B)X = 0$ es una cónica a la cual $X(t)$ corta siempre en dos puntos. Podemos afirmar entonces, por las propiedades de las cónicas, que $X^T(\lambda_0 A + B)X = 0$ es una elipse. Se cumple, por definición de elipse que $\det(\lambda_0 A + B) < 0$, y por tanto $\det(\lambda_0 A + B) \neq 0$, contradiciendo la hipótesis de que $f(\lambda) = 0$. En consecuencia la ecuación característica $f(\lambda) = 0$ no tiene raíces reales positivas. \square

Lema 3.7 *Si dos elipses son tangentes exteriormente entonces su ecuación característica tiene una raíz real doble positiva.*

Demostración. Primero vamos a ver que hay una raíz de $f(\lambda) = 0$. Sean $\mathcal{A} : X^T A X = 0$ y $\mathcal{B} : X^T B X = 0$ dos elipses tangentes en un punto exterior a ambas, X_0 . Entonces podemos construir la recta tangente a \mathcal{A} y \mathcal{B} que pase por X_0 . Dichas rectas son, $r_1 : X_0^T A X = 0$ y $r_2 : X_0^T B X = 0$ respectivamente, donde $X = (x_1, y_1, 1)$. Es fácil apreciar que las rectas r_1 y r_2 han de ser la misma. Se cumple por tanto que los vectores directores de ambas rectas son proporcionales. Por tanto existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que,

$$B X_0 = -\lambda_0 A X_0 \quad \text{y} \quad (\lambda_0 A + B) X_0 = 0, \quad \text{con } X_0 \neq (0, 0, 0). \quad (3.12)$$

Como consecuencia de todo lo anterior podemos afirmar que $X_0 \in \text{Ker}(\lambda_0 A + B)$. Por tanto $\dim(\text{Ker}[\lambda_0 A + B]) > 0$. Entonces por el Teorema de las Dimensiones tenemos que $\text{rang}(\lambda_0 A + B) < 4$ y, en consecuencia, $\det(\lambda_0 A + B) = 0$. Concluimos que λ_0 es una raíz de la ecuación característica de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Sea Y_0 un punto interior de \mathcal{B} . Entonces, por construcción Y_0 deberá ser un punto exterior de \mathcal{A} . Podemos expresar estas circunstancias algebraicamente como,

$$Y_0^T A Y_0 > 0, \quad (3.13)$$

$$Y_0^T B Y_0 < 0. \quad (3.14)$$

Construimos una recta r que pase por X_0 y Y_0 . Sean U_0 y V_0 dos puntos tal que: $U_0 = r \cap \mathcal{A}$ con $U_0 \neq X_0$, $V_0 = r \cap \mathcal{B}$ con $V_0 \neq X_0$.

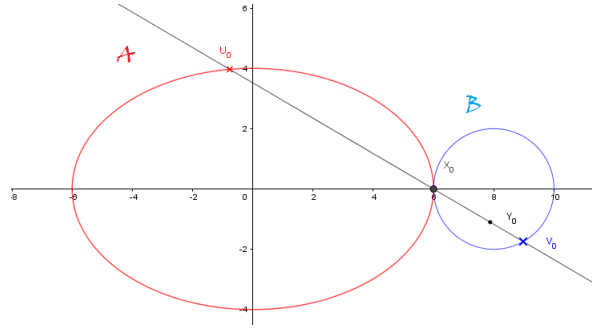


Figura 3.4: Imagen construida con Geogebra.

También podemos expresar los puntos U_0 y V_0 como $U_0 = (1 - s)X_0 + sY_0$ para algún $s < 0$ y $V_0 = (1 - t)X_0 + tY_0$ para algún $t > 0$. Como $U_0 \in \mathcal{A}$ y $V_0 \in \mathcal{B}$ se tiene:

$$0 = U_0^T A U_0 = ((1 - s)X_0 + sY_0)^T A ((1 - s)X_0 + sY_0).$$

Ordenando, por ser $s < 0$ y gracias a la ecuación (3.13) se tiene

$$Y_0^T A X_0 = \frac{-sY_0^T A Y_0}{2(1 - s)} > 0. \quad (3.15)$$

Razonando análogamente para V_0 tenemos que,

$$0 = V_0^T B V_0 = ((1 - t)X_0 + tY_0)^T B ((1 - t)X_0 + tY_0).$$

Ordenando, por ser $t > 1$ y gracias a la ecuación 3.14,

$$Y_0^T B X_0 = \frac{-tY_0^T B Y_0}{2(1 - t)} < 0. \quad (3.16)$$

Sabiendo que $(\lambda_0 A + B)X_0 = 0$ y multiplicando a izquierda por Y_0^T :

$$0 = Y_0^T (\lambda_0 A + B) X_0 = \lambda_0 Y_0^T A X_0 + Y_0^T B X_0.$$

Se tiene finalmente, por las ecuaciones (3.15) y (3.16), lo siguiente:

$$\lambda_0 = \frac{-Y_0^T B X_0}{Y_0^T A X_0} > 0. \quad (3.17)$$

Hemos visto que la ecuación característica de \mathcal{A} y \mathcal{B} , definida como $\det(\lambda A + B) = 0$ tiene la estructura siguiente,

$$f(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{(ab)^2} + \dots + (-r^2) = 0.$$

Transformando la ecuación en una ecuación mónica

$$\lambda^3 + \dots + (abr)^2 = 0. \quad (3.18)$$

Si $\varepsilon_1, \lambda_0, \lambda_1$ son las tres raíces de $f(\lambda)$ entonces $\varepsilon_1 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 = (abr)^2 > 0$. Por el Teorema 3.2 sabemos que $\varepsilon_1 < 0$. También sabemos por la ecuación (3.17) que $\lambda_0 > 0$. En consecuencia, de la ecuación (3.18) tenemos $\lambda_1 > 0$. Ahora ya hemos probado que tenemos dos raíces positivas. Veamos ahora

que dichas raíces son la misma. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\lambda_0 \neq \lambda_1$. Por ser λ_0 y λ_1 raíces de $f(\lambda) = 0$ entonces λ_0 y λ_1 son autovalores de la matriz $-A^{-1}B$ como ya vimos en la demostración del Lema 3.5. Sabemos que X_0 es un autovector asociado λ_0 y sea X_1 un autovector asociado a λ_1 . Por ser autovectores asociados a distintos autovalores podemos asegurar que son autovectores linealmente independientes. Entonces

$$(\lambda_1 I - (-A^{-1}B))X_1 = 0.$$

Multiplicando por A a la izquierda se tiene

$$(\lambda_1 A + B)X_1 = 0 \quad (3.19)$$

Por un lado, usando la ecuación (3.12) y sabiendo que $(\lambda A + B) = (\lambda A + B)^T$

$$((\lambda_0 A + B)X_0)^T = X_0^T(\lambda_0 A + B) = 0.$$

Multiplicando por X_1 a la derecha, se tiene

$$X_0^T(\lambda_0 A + B)X_1 = 0. \quad (3.20)$$

Por otro lado usando la ecuación (3.19) y por ser simétricas las matrices A y B , se tiene

$$((\lambda_1 A + B)X_1)^T = X_1^T(\lambda_1 A + B) = 0.$$

Multiplicando por X_0 a la derecha, se tiene

$$X_0^T(\lambda_1 A + B)X_1 = 0. \quad (3.21)$$

Desarrollando las ecuaciones (3.20) y (2.21) respectivamente, se obtiene:

$$\lambda_0 X_0^T A X_1 + X_0^T B X_1 = 0$$

$$\lambda_1 X_0^T A X_1 + X_0^T B X_1 = 0$$

Tomando $X_0^T A X_1 = \alpha$ y $X_0^T B X_1 = \beta$ tenemos el sistema de ecuaciones lineales siguiente,

$$\lambda_0 \alpha + \beta = 0$$

$$\lambda_1 \alpha + \beta = 0$$

Como por hipótesis $\lambda_0 \neq \lambda_1$

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces el sistema es compatible determinado y tiene una única solución, la trivial. Por tanto $\alpha = \beta = X_0^T A X_1 = X_0^T B X_1 = 0$. Como $X_0^T A X_1 = 0$ y $X_0^T B X_1 = 0$ tenemos que X_1 es un punto de las rectas tangentes r_1 y r_2 , las cuales son la misma por construcción.

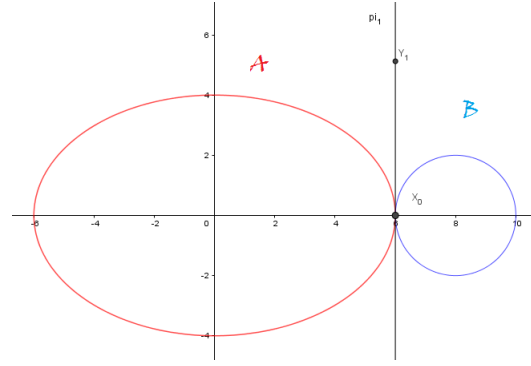


Figura 3.5: Imagen construida con Geogebra.

Haciendo una compilación de lo mostrado durante esta demostración, tenemos que por un lado, podemos afirmar que $X_1^T A X_1 > 0$ y $X_1^T B X_1 > 0$. Entonces es trivial que $\lambda_1 X_1^T A X_1 + X_1^T B X_1 > 0$. Por otro lado gracias a la ecuación (3.19) tenemos que $(\lambda_1 A + B)X_1 = 0$. Multiplicando a izquierda por X_1^T y sabiendo que por hipótesis, $\lambda_1 > 0$ obtenemos que $X_1^T(\lambda_1 A + B)X_1 = 0$, lo cual es una clara contradicción. Como conclusión se tiene que $\lambda_0 = \lambda_1 > 0$, es decir la ecuación $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz positiva doble. \square

3.3. Teorema Fundamental.

Una vez enunciados y demostrados los lemas y teoremas anteriores, ya podemos exponer el teorema central de este capítulo.

Teorema 3.8 Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipses con ecuación característica $f(\lambda) = 0$. Entonces,

\mathcal{A} y \mathcal{B} están separadas si y solo si $f(\lambda) = 0$ tiene dos raíces reales positivas distintas.

\mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes exteriormente si y solo si $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz real positiva doble.

Demostración. Comencemos con la primera equivalencia. Supongamos que \mathcal{A} y \mathcal{B} están separados.

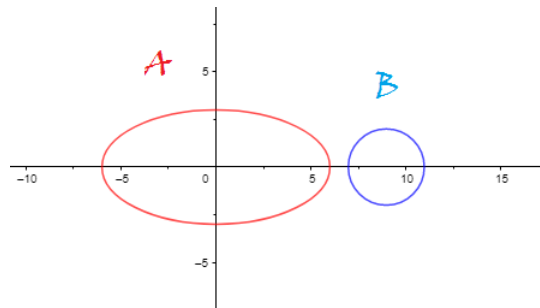


Figura 3.6: Imagen construida con Geogebra.

Entonces empleando el Teorema 3.4 directamente podemos afirmar que $f(\lambda) = 0$ tiene dos raíces reales, positivas y distintas.

Vamos con la otra implicación de la primera equivalencia. Supongamos que $f(\lambda) = 0$ tiene dos raíces reales positivas distintas. Por un lado apoyándonos en el Lema 3.6 sabemos que \mathcal{A} y \mathcal{B} no tienen puntos interiores en común. Por otro, lado gracias al Lema 3.7 sabemos que tampoco hay puntos que sean externamente tangentes a las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} . Por tanto las elipses están separadas. Se demuestra a continuación la siguiente equivalencia. Supongamos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son tangentes exteriormente.

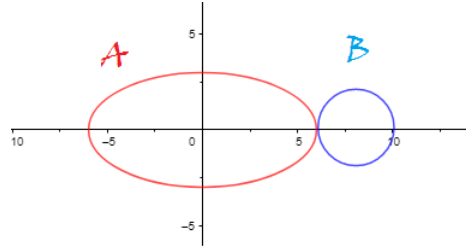


Figura 3.7: Imagen construida con Geogebra.

Por el Lema 3.7 podemos asegurar que la ecuación $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz doble positiva. Para demostrar la otra implicación, supongamos que la ecuación $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz doble real positiva. Aplicando el Lema 3.5 podemos afirmar que \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen un único punto en común.

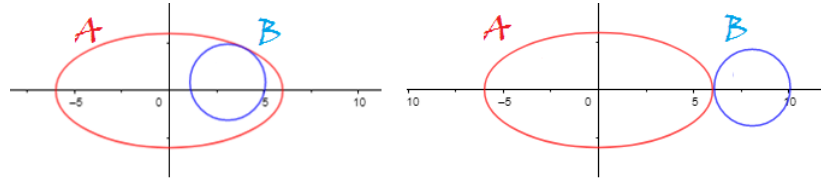


Figura 3.8: Imagen construida con Geogebra.

Supongamos que dicho punto es un punto interior. Aplicando el Lema 3.6, tendríamos que la ecuación $f(\lambda) = 0$ no tiene raíces reales positivas. Se llega así a una contradicción, y en consecuencia el punto en común de \mathcal{A} y \mathcal{B} tendrá que ser un punto exterior. Y por tanto las elipses se tocan externamente de forma tangencial.

Capítulo 4

Interferencia: eliminación de cuantificadores.

En este capítulo se muestra como las formulas que proporciona la eliminación de cuantificadores permiten un tratamiento algoritmico de los teoremas 2.8 y 3.8.

La eliminación de cuantificadores para las formulas que involucren cuantificadores universales y existenciales y desigualdades polinomiales permiten traducir los resultados en los teoremas 2.8 y 3.8 a formulas en los coeficientes de las matrices que definen las dos elipses o los dos elipsoides caracterizando su separación, su tangencia exterior o su superposicion.

El ejemplo más simple de eliminación de cuantificadores lo constituye el análisis de la formula:

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + bx + c = 0$$

Es bien conocido que esta esta fórmula es equivalente a

$$b^2 - 4c \geq 0$$

Alfred Tarski demostró, en los años 30 del siglo XX, que, para cualquier fórmula involucrando cuantificadores universales y existenciales y desigualdades polinomiales, siempre existe una formula equivalente libre de cuantificadores y, además, existe un algoritmo que la calcula. Si bien este algoritmo es demasiado complicado para ser implementado o incluso aplicado para fórmulas no muy complicadas, en los ultimos años, han aparecido distintas aplicaciones de esta idea que usan adaptaciones “ad-hoc” de dicho algoritmo a situaciones con una estructura en las que si es posible encontrar la fórmula libre de cuantificadores.

Y este es el caso con el que nos encontramos aquí. El Teorema 3.8 dice que las dos elipses consideradas están separadas si y solo si su ecuación característica tiene dos raíces reales positivas distintas. Por lo tanto, las dos elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} están separadas si y solo si

$$\exists \lambda_1 > 0, \exists \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad f(\lambda_1) = 0, \quad f(\lambda_2) = 0$$

donde

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

es la ecuación característica de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Y además se sabe que, al ser \mathcal{A} y \mathcal{B} elipses, $f(\lambda)$ tiene siempre dos raíces reales negativas (contadas con su multiplicidad) y $c > 0$.

Usando las técnicas en [11] y [12] de eliminación de cuantificadores, para este caso, se demuestra que la condicion anterior es cierta si y solo si se tiene que

$$18abc + a^2b^2 - 27c^2 - 4a^3c - 4b^3 > 0$$

y el número de cambios de signo en $\{1, a, b, 1\}$ es 2. Puesto que a , b y c son cocientes de polinomios en las entradas de las matrices que definen las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} , esta es justamente la fórmula que se estaba buscando para caracterizar la separación de dos elipses. Esta caracterización, como se mostrará en los ejemplos de esta sección, permite además analizar la detección de los intervalos de separación cuando las dos elipses consideradas dependen del tiempo.

En este capítulo se usan las fórmulas, basadas en la de eliminación de cuantificadores, que se presentan en [13] para mostrar diferentes ejemplos de como los resultados de los capítulos anteriores tienen una traducción algorítmica y permiten tratar el problema de la separación de dos elipses o dos elipsoides en movimiento.

4.1. Análisis de la interferencia de dos elipses.

4.1.1. Caracterización del signo de las raíces de la ecuación característica.

Emplearemos la caracterización que aparece en [13, pág. 6], (la cual es la más eficiente que se conoce y se puede encontrar también en [14]). Como antes se indicaba esta caracterización establece una relación entre el Teorema 3.8 y los coeficientes la ecuación 4.1.

Antes de citar la caracterización es conveniente explicar una cuestión relativa a su notación. Se denota por $\mathbf{Var}(b_0, b_1, \dots, b_n)$ al número de cambios de signos de una secuencia finita de números b_0, b_1, \dots, b_n una vez eliminados los b_i nulos.

Caracterización 1.

Sean $\mathcal{A} : X^t A X = 0$ y $\mathcal{B} : X^t B X = 0$ dos elipses, y sea

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } c \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

su ecuación característica. Y sea

$$\mathbf{Disc}(f(\lambda)) = 18abc + a^2b^2 - 27c^2 - 4a^3c - 4b^3.$$

- Las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} están separadas si y solo si

$$\mathbf{Disc}(f(\lambda)) > 0 \text{ y } \mathbf{Var}(1, a, b, 1) = 2. \quad (4.2)$$

- Las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} se tocan externa y tangencialmente si y solo si

$$\mathbf{Disc}(f(\lambda)) = 0, \quad a^2 - 3b > 0 \text{ y } 9c - ab > 0.$$

- Las elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} se superponen si y solo si se cumple alguna de las condiciones siguientes

1. $\mathbf{Disc}(f(\lambda)) < 0$.
2. $\mathbf{Disc}(f(\lambda)) = 0, \quad a^2 - 3b > 0 \text{ y } 9c - ab < 0$.
3. $\mathbf{Disc}(f(\lambda)) > 0 \text{ y } \mathbf{Var}(1, a, b, 1) = 0$.

Por tanto a partir de los coeficientes la ecuación (4.1) y la **Caracterización 1** podremos determinar cuando dos elipses están separadas.

4.1.2. Simulaciones fijas.

Ejemplo 1

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipses fijas definidas por:

$$\mathcal{A} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad y \quad \mathcal{B} : \frac{4(x-4)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

En este primer ejemplo trataremos el caso de una simulación fija. Sus matrices asociadas son,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{16}{9} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{16}{9} & 0 & \frac{55}{9} \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica de \mathcal{A} y \mathcal{B} , viene definida por $\det(\lambda A + B) = 0$,

$$\lambda^3 + \left(-\frac{10}{9}\right)\lambda^2 + \left(\frac{17}{9}\right)\lambda + 4 = 0.$$

Entonces empleando la notación de la ecuación 4.1 tenemos que $a = -\frac{10}{9}$, $b = \frac{17}{9}$ y $c = 4$. Y aplicando la caracterización previamente mostrada se tiene

$$\mathbf{Disc}(f(\lambda)) = -\frac{3829760}{6561} < 0 \quad \mathbf{Var}(1, a, b, 1) = \mathbf{Var}\left(1, -\frac{49}{4}, -\frac{31}{4}, 1\right) = 2,$$

lo que permite concluir que las elipses están superpuestas, por la ecuación 4.2. Gráficamente, con

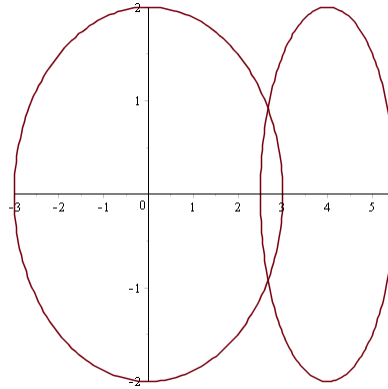


Figura 4.1: Imagen de las dos elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} . La imagen ha sido construida con Maple 18.

la ayuda de Maple 18, se comprueba que efectivamente las dos elipses se superponen.

4.1.3. Simulaciones con movimiento.

En el caso de las simulaciones con elipses en movimiento los coeficientes de la ecuación 4.1 pasan de ser constantes a ser funciones respecto de t . Por tanto la ecuación característica con la que vamos a trabajar tendrá la siguiente estructura,

$$\lambda^3 + a(t)\lambda^2 + b(t)\lambda + c(t) = 0.$$

con $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ funciones racionales en t con coeficientes reales.

Por la caracterización sabemos que las elipses están separadas según los valores que tomen las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$.

Ejemplo 2

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipses tal que,

$$\mathcal{A}; \quad \frac{(x-t)^2}{9} + \frac{(y-4t)^2}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{B}; \quad \frac{4(x-(4+t))^2}{9} + \frac{(y-t^2)^2}{4} = 1.$$

Donde t puede ser cualquier valor real. Entonces las matrices asociadas de \mathcal{A} y \mathcal{B} son respectivamente,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & -\frac{t}{9} \\ 0 & \frac{1}{4} & -t \\ -\frac{t}{9} & -t & \frac{37t^2}{9} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{4t}{9} - \frac{16}{9} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{t^2}{4} \\ -\frac{4t}{9} - \frac{16}{9} & -\frac{t^2}{4} & \frac{t^4}{4} + \frac{4t^2}{9} + \frac{32t}{9} + \frac{55}{9} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $f(\lambda; t) = \det(\lambda A(t) + B(t))$. Y por tanto la ecuación característica es,

$$\lambda^3 + \left(-\frac{t^4}{4} + 2t^3 - 4t^2 - \frac{10}{9}\right) \lambda^2 + \left(-t^4 + 8t^3 - 16t^2 + \frac{17}{9}\right) \lambda + 4$$

Por tanto existirán unos ciertos valores de $t \in \mathbb{R}$ para los cuales las elipses estén en superposición y habrá otros para los cuales las elipses estén separadas.

Para estudiar las infinitas posiciones para \mathcal{A} y \mathcal{B} tomamos las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $\mathbf{Disc}(f)$. Estudiemos sus raíces,

$$a(t) = -\frac{t^4}{4} + 2t^3 - 4t^2 - \frac{10}{9},$$

$$b(t) = -t^4 + 8t^3 - 16t^2 + \frac{17}{9} \quad \text{y}$$

$$c(t) = 4.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Disc}(f(\lambda; t)) &= \frac{t^{16}}{16} - 2t^{15} + 28t^{14} - 224t^{13} + \frac{80969t^{12}}{72} - \frac{11081t^{11}}{3} \\ &+ \frac{24794t^{10}}{3} - \frac{126368t^9}{9} + \frac{9348779t^8}{432} - \frac{757163t^7}{27} + \frac{166742t^6}{9} + \frac{13648t^5}{27} \\ &- \frac{294905t^4}{729} - \frac{588728t^3}{729} + \frac{1177456t^2}{729} - \frac{3829760}{6561}. \end{aligned}$$

Vamos a estudiar las raíces reales de $a(t)$, $b(t)$ y $\mathbf{Disc}(f(\lambda; t))$;

- $a(t)$ no tiene raíces reales.
- las raíces reales de $b(t)$ son $-0,3182684361$, $0,3796199649$, $3,620380035$ y $4,318268436$.
- las raíces reales de $\mathbf{Disc}(f(\lambda; t))$ son $-0,4327213677$, $0,5571324568$, $3,442867543$ y $4,4327213638$.

Ordenando las raíces reales, tenemos que $\epsilon_1 = -0,4327213677$, $\epsilon_2 = -0,3182684361$, $\epsilon_3 = 0,3796199649$, $\epsilon_4 = 0,5571324568$, $\epsilon_5 = 3,442867543$, $\epsilon_6 = 3,620380035$, $\epsilon_7 = 4,318268436$, $\epsilon_8 = 4,4327213638$.

Vamos a estudiar los intervalos que definen estas raíces reales usando las condiciones de la **Caracterización 1** puesto que por construcción el signo de $a(t)$, $b(t)$ y $\mathbf{Disc}(f(\lambda; t))$ en cada uno de estos intervalos será constante:

1. Sea $I_1 = (-\infty, \epsilon_1)$ y sea $-1 \in I_1$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; -1)) = \frac{2533005985}{26244} > 0$ y $\mathbf{Var}(1, -\frac{265}{36}, -\frac{208}{9}, 1) = 2$. En el intervalo I_1 las elipses están separadas.
2. Sea $I_2 = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ y sea $-0,35 \in I_2$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; -0,35)) = -301,6107204 < 0$ y $\mathbf{Var}(1, -1,690612674, -0,429117361, 1) = 2$. En el intervalo I_2 las elipses están superpuestas.
3. Sea $I_3 = (\epsilon_2, \epsilon_3)$ y sea $0 \in I_3$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 0)) = -\frac{3829760}{6561} < 0$ y $\mathbf{Var}(1, -\frac{10}{9}, \frac{17}{9}, 1) = 2$. En el intervalo I_3 las elipses están superpuestas.
4. Sea $I_4 = (\epsilon_3, \epsilon_4)$ y sea $0,4 \in I_4$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 0,4)) = -340,9833815 < 0$ y $\mathbf{Var}(1, -1,629511111, -0,184711111, 1) = 2$. En el intervalo I_4 las elipses están superpuestas.
5. Sea $I_5 = (\epsilon_4, \epsilon_5)$ y sea $2 \in I_5$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 2)) = \frac{153123328}{6561} > 0$ y $\mathbf{Var}(1, -\frac{46}{9}, -\frac{127}{9}, 1) = 2$. En el intervalo I_4 las elipses están separadas.
6. Sea $I_6 = (\epsilon_5, \epsilon_6)$ y sea $3,5 \in I_6$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 3,5)) = -156,3459470 < 0$ y $\mathbf{Var}(1, -1,87673611, -1,1736111, 1) = 2$. En el intervalo I_5 las elipses se superponen.
7. Sea $I_7 = (\epsilon_6, \epsilon_7)$ y sea $4 \in I_7$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 4)) = -\frac{3829760}{6561} < 0$ y $\mathbf{Var}(1, -\frac{10}{9}, \frac{17}{9}, 1) = 2$. En el intervalo I_5 las elipses se superponen.
8. Sea $I_8 = (\epsilon_7, \epsilon_8)$ y sea $4,4 \in I_8$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 4,4)) = -147,5593570 < 0$ y $\mathbf{Var}(1, -1,8855111, -1,2087111, 1) = 2$. En el intervalo I_8 las elipses se superponen.
9. Sea $I_9 = (\epsilon_8, \epsilon_9)$ y sea $5 \in I_9$, entonces $\mathbf{Disc}(f(\lambda; 5)) = \frac{2533005985}{26244} > 0$ y $\mathbf{Var}(1, -\frac{265}{36}, -\frac{208}{9}, 1) = 2$. En el intervalo I_9 las elipses están separadas.

Por tanto en

$$I_1 \cup I_5 \cup I_9 \cup \{\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_6, \epsilon_7\}$$

las elipses están separadas y en

$$I_2 \cup I_2 \cup I_4 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_7$$

las elipses se superponen. Finalmente en

$$\{\epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_8\}$$

las elipses son tangentes externamente. Veamos gráficamente estos resultados.

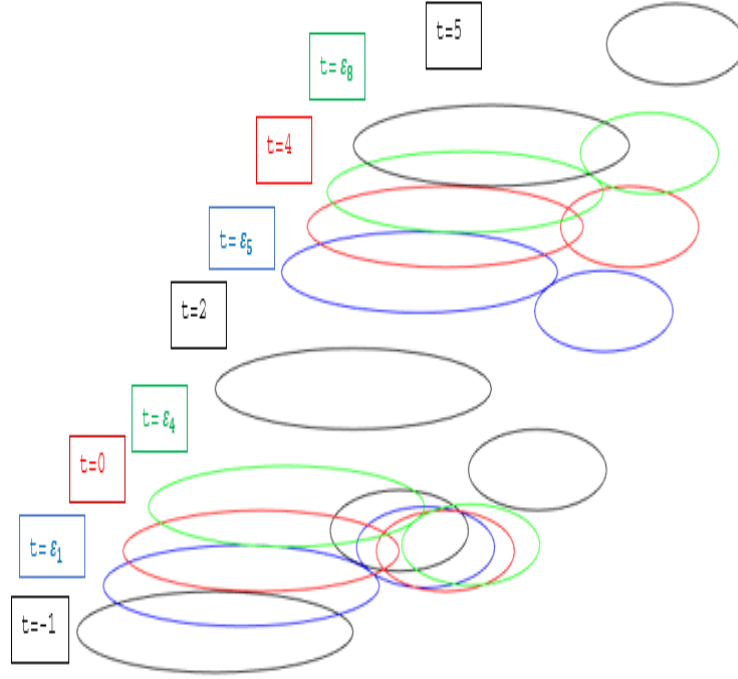


Figura 4.2: Imagen del movimiento de las dos elipses \mathcal{A} y \mathcal{B} en función de t . Imagen construida con Matlab R2017a.

Análisis del tiempo en ejecutar el algoritmo para el caso bidimensional.

Veamos el tiempo de ejecución que tarda el algoritmo en aplicarse. Para ello tomemos 5 ejemplos de estudio de la posición de dos elipses y estudiemos los tiempos que resultarán de aplicar las técnicas mencionadas en este trabajo.

En el cuadro siguiente, mostramos los 5 casos de el estudio de la posición de 5 pares de elipses.

Casos	$t_1(s)$	$t_2(s)$	$t_3(s)$	$t_4(s)$	$t_t(s)$
caso 1	0.0165	0.0165	0.03125	0.03125	0.20425
caso 2	0.0165	0.0165	0.14	0.03125	0.0955
caso 3	0.035	0.015	0.063	0.03425	0.1472
caso 4	0.047	0.016	0.172	0.015625	0.25060
caso 5	0.047	0.015	0.047	0.03215	0.14115

Cuadro 4.1: Elipses en movimiento: tiempos de cálculo.

En el cuadro anterior se usa la siguiente notación:

1. t_1 representa el tiempo en hallar la ecuación característica y sus coeficientes, $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$.
2. t_2 denota el tiempo en calcular el **Disc**(f).

3. t_3 denota el tiempo en localizar las raíces reales de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y el **Disc**(f).
4. t_4 denota el tiempo en determinar la posición de las elipses en todos los intervalos.
5. Y finalmente t_t denota el tiempo total.

En el anexo de esta memoria se pueden encontrar las ecuaciones de las elipses utilizadas y en el CD que acompaña a esta memoria los resultados de la aplicación del algoritmo junto con la worksheet Maple con la que reproducir los cálculos realizados en esta sección.

4.2. Análisis de la interferencia de dos elipsoides.

4.2.1. Caracterización del signo de las raíces de la ecuación característica.

Para el caso tridimensional también emplearemos la caracterización que aparece en [13, pág. 6], (la cual es la más avanzada que se conoce y se puede encontrar igualmente en [14]). Esta caracterización también establece una relación entre los casos que trata El Teorema 2.8 y los coeficientes de la ecuación 4.3.

Usaremos la notación que aparece en la caracterización tal que,

$$\Delta(f) = -27a^4d^2 + 18a^3bcd - 4a^3c^3 - 4a^2b^3d + a^2b^2c^2 + 144a^2bd^2 - 6a^2c^2d - 80ab^2cd + 18abc^3 + 16b^4d - 4b^3c^2 - 192acd^2 - 128b^2d^2 + 144bc^2d - 27c^4 + 256d^3.$$

$$\Delta_1(f) = 6a^3c - 2a^2b^2 + 12a^2d - 28abc + 8b^3 + 32bd + 36c^2.$$

$$\Delta_{10}(f) = 9a^3d - a^2bc - 32abd - 3ac^2 + 4b^2c + 48cd.$$

Caracterización 2.

Sean \mathcal{A} ; $X^tAX = 0$ y \mathcal{B} ; $X^tBX = 0$ dos elipsoides, y sea

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \quad y \quad d \in \mathbb{R}^+ \quad (4.3)$$

la ecuación característica.

- Los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} están separados si y solo si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes,
 1. $\Delta(f) > 0$ y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2$.
 2. $\Delta(f) = 0$, $\Delta_1(f) < 0$, $\Delta_{10}(f) < 0$ y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2$.
- Los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} se tocan externa y tangencialmente si y solo si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes,
 1. $\Delta(f) = 0$ y $\Delta_1(f)\Delta_{10}(f) < 0$.
 2. $\Delta(f) = 0$, $\Delta_1(f) < 0$, $\Delta_{10}(f) < 0$ y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2$.
- Los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} se superponen si y solo si se cumple alguna de las condiciones siguientes,

1. $\Delta(f) < 0$.
2. $\Delta(f) > 0$, y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2$.
3. $\Delta(f) = 0$, $\Delta_1(f) > 0$ y $\Delta_{10}(f) > 0$.
4. $\Delta(f) = 0$, $\Delta_1(f) < 0$, $\Delta_{10}(f) < 0$ y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2$.
5. $\Delta(f) = 0$, $\Delta_1(f) = 0$, y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2$.

Por tanto a partir de los coeficientes la ecuación 4.3 y las condiciones mostradas en la **Caracterización 2** podremos determinar la posición relativa de dos elipsoides cualquiera.

4.2.2. Simulaciones fijas.

Ejemplo 3

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipsoides fijos tal que,

$$\mathcal{A}; \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{B}; \quad \frac{4(x-4)^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{3z^2}{25} = 1.$$

Sus matrices asociadas son,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} & -\frac{9}{25} \\ -\frac{1}{9} & -1 & -\frac{9}{25} & \frac{1429}{225} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & 0 & -40 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{25} & -\frac{3}{25} \\ -40 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{25} & \frac{337}{100} \end{pmatrix}$$

Construimos la ecuación característica tal que $\det(\lambda A + B) = 0$.

$$\lambda^4 - \frac{7237 \lambda^3}{900} - \frac{10007 \lambda^2}{180} - \frac{3604 \lambda}{75} + 12 = 0. \quad (4.4)$$

Por tanto se tiene que los coeficientes de la ecuación característica son: $a = -\frac{7283}{900}$, $b = -\frac{10007}{180}$, $c = -\frac{3604}{75}$ y $d = 12$. Y los polinomios a estudiar son: $\Delta(f) = \frac{1209812214926760191262721}{922640625000000}$, $\Delta_1(f) = -\frac{312246840892130593}{328050000000}$, $\Delta_{10}(f) = -\frac{660618319161827}{683437500}$. Y por último $\mathbf{Var}(1, -\frac{7283}{900}, -\frac{10007}{180}, -\frac{3604}{75}, 1) = 2$. Por cumplirse que,

$$\Delta(f) > 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{Var}(1, a, b, c, 1) = 2.$$

Se tiene que los elipsoides están separados. Veámoslo gráficamente.

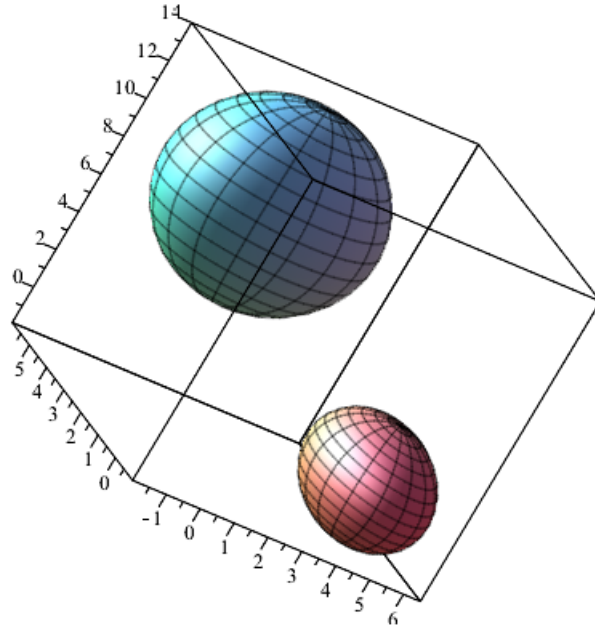


Figura 4.3: Posición de los elipsoides A y B. Imagen construida con Matlab2017a

Comprobamos con la ayuda gráfica que naturalmente los elipsoides están separados.

4.2.3. Simulaciones con movimiento.

En el caso de las simulaciones con elipsoides en movimiento los coeficientes de la ecuación 4.3 pasan de ser constantes a ser funciones racionales. La ecuación característica se puede escribir como:

$$\lambda^4 + a(t)\lambda^3 + b(t)\lambda^2 + c(t)\lambda + d(t) = 0.$$

con $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$ funciones racionales con coeficientes reales. Por la caracterización sabemos que los elipsoides están separados segun los valores que tomen las funciones $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$.

Ejemplo 4

Sean dos elipsoides tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}; \quad & \frac{(x-t)^2}{9} + \frac{(y-4t)^2}{4} + \frac{(z-9t^2)^2}{25} = 1 \quad \text{y} \\ \mathcal{B}; \quad & \frac{4(x-(4+t))^2}{9} + \frac{(y-t^2)^2}{4} + \frac{3(z-t^3)^2}{25} = 1. \end{aligned}$$

Estudiemos la posición de los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} para cualquier valor de t . De esta forma sus matrices asociadas son,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & -\frac{t}{9} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -t \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} & -\frac{9t^2}{25} \\ -\frac{t}{9} & -t & -\frac{9t^2}{25} & \frac{81t^4}{25} + \frac{37t^2}{9} - 1 \end{pmatrix}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & 0 & -\frac{4t+16}{9} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{t^2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{25} & -\frac{3t^3}{25} \\ -\frac{4t+16}{9} & -\frac{t^2}{4} & -\frac{3t^3}{25} & \frac{3t^6}{25} + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^2}{9} + \frac{32t}{9} + \frac{55}{9} \end{pmatrix}$$

La ecuación característica $\det(\lambda A(t) + B(t)) = 0$ es,

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left(-\frac{3t^6}{25} + \frac{54t^5}{25} - \frac{997t^4}{100} + 2t^3 - 4t^2 + \frac{17}{9} \right) \lambda^3 \\ & + \left(-3/5 t^6 + \frac{54t^5}{5} - \frac{1007t^4}{20} + 14t^3 - 28t^2 - \frac{13}{9} \right) \lambda^2 \\ & + \left(-\frac{12t^6}{25} + \frac{216t^5}{25} - \frac{1047t^4}{25} + 24t^3 - 48t^2 + \frac{29}{3} \right) \lambda + 12 = 0. \end{aligned}$$

Tomamos los coeficientes de la ecuación característica y los polinomios para hallar sus raíces.

- $a(t) = -\frac{3t^6}{25} + \frac{54t^5}{25} - \frac{997t^4}{100} + 2t^3 - 4t^2 + \frac{17}{9}.$
- $b(t) = -\frac{3t^6}{5} + \frac{54t^5}{5} - \frac{1007t^4}{20} + 14t^3 - 28t^2 - \frac{13}{9}.$
- $c(t) = -\frac{12t^6}{25} + \frac{216t^5}{25} - \frac{1047t^4}{25} + 24t^3 - 48t^2 + \frac{29}{3}.$
- $\Delta(f) = \frac{104976t^{36}}{244140625} - \frac{11337408t^{35}}{244140625} + \frac{563097096t^{34}}{244140625} - \frac{3404360016t^{33}}{48828125} + \frac{69849256419t^{32}}{48828125} - \frac{5134301653608t^{31}}{244140625} + \frac{55641165432759t^{30}}{244140625} - \frac{450468952699698t^{29}}{244140625} + \frac{8745121750941459t^{28}}{781250000} - \frac{9898268768539299t^{27}}{195312500} + \frac{1328610547399708737t^{26}}{7812500000} - \frac{1653816434761784853t^{25}}{3906250000} + \frac{50430987988615419761t^{24}}{62500000000} - \frac{198860619104543463t^{23}}{156250000} + \frac{553676615477431717t^{22}}{312500000} - \frac{13780513796491233t^{21}}{6250000} + \frac{1984326884744082947t^{20}}{750000000} - \frac{51878841668297519t^{19}}{18750000} + \frac{63240387529959463t^{18}}{21093750} - \frac{4174357993884071t^{17}}{1562500} + \frac{20909990546003363497t^{16}}{8100000000} - \frac{18010552726868281t^{15}}{10125000} + \frac{100705396412329t^{14}}{62500} - \frac{1204352436495203t^{13}}{1265625} + \frac{158907842850378373t^{12}}{182250000} - \frac{4233417010127t^{11}}{11250} + \frac{146655294541963t^{10}}{455625} - \frac{37208934216272t^9}{455625} + \frac{50378635771087t^8}{455625} - \frac{13985852656t^7}{225} - \frac{51533250560}{59049} + \frac{56191065344t^5}{18225} + \frac{8932710360992t^6}{164025} - \frac{3232977536t^3}{2187} - \frac{300940656944t^4}{54675} + \frac{6465955072t^2}{2187}.$
- $\Delta_1(f) = -\frac{2106t^{24}}{390625} + \frac{151632t^{23}}{390625} - \frac{4792608t^{22}}{390625} + \frac{86979744t^{21}}{390625} - \frac{795369951t^{20}}{312500} + \frac{7374219039t^{19}}{390625} - \frac{35194217463t^{18}}{390625} + \frac{103585921812t^{17}}{390625} - \frac{22594168437453t^{16}}{50000000} + \frac{30642191229t^{15}}{62500} - \frac{79343673289t^{14}}{125000} + \frac{41642886573t^{13}}{62500} - \frac{4146925990709t^{12}}{4500000} + \frac{971578829t^{11}}{1500} - \frac{8465365541t^{10}}{11250} + \frac{232955606t^9}{625} - \frac{63014740991t^8}{135000} + \frac{120393286t^7}{675} - \frac{17593798t^6}{81} + \frac{20876572t^5}{675} - \frac{2469010171t^4}{36450} + \frac{15889276t^3}{729} - \frac{31778552t^2}{729} + \frac{28956856}{6561}.$
- $\Delta_{10}(f) = -\frac{324t^{24}}{78125} + \frac{23328t^{23}}{78125} - \frac{739152t^{22}}{78125} + \frac{13494816t^{21}}{78125} - \frac{62402931t^{20}}{31250} + \frac{1181117286t^{19}}{78125} - \frac{5857132932t^{18}}{78125} + \frac{18624643848t^{17}}{78125} - \frac{2401752037921t^{16}}{5000000} + \frac{21617093531t^{15}}{31250} - \frac{233485421609t^{14}}{250000} + \frac{119424350937t^{13}}{125000} - \frac{10773631746571t^{12}}{9000000} + \frac{4983896253t^{11}}{5000} - \frac{26054988479t^{10}}{22500} + \frac{154713211t^9}{225} - \frac{2568812371t^8}{3600} + \frac{60598199t^7}{225} - \frac{1657587646t^6}{6075} + \frac{32518736t^5}{675} - \frac{501105191t^4}{12150} + \frac{554876t^3}{243} - \frac{1109752t^2}{243} + \frac{15187688}{2187}.$

Vamos a estudiar los intervalos que definen estas raíces reales usando las condiciones de la Caracterización 1 puesto que por construcción el signo de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\Delta(f)$, $\Delta_1(f)$ y $\Delta_{10}(f)$, en cada uno de estos intervalos no cambiará,

- Las raíces de $a(t)$ son, $-0,4951540720$ y $0,5736934876$.
- $b(t)$ no tiene raíces reales.

- Las raíces de $c(t)$ son $-0,3882025231$ y $0,4633102560$.
- Las raíces de $\Delta(f)$ son, $-0,3980866479$ y $0,4668352033$.
- Las raíces de $\Delta_1(f)$ son, $-0,2773394025$ y $0,3150362585$.
- Las raíces de $\Delta_{10}(f)$ son, $-0,4273049890$ y $0,5078250728$.

Ordenemos las raíces, $\epsilon_1 = -0,4951540720$, $\epsilon_2 = -0,4273049890$, $\epsilon_3 = -0,3980866479$, $\epsilon_4 = -0,3882025231$, $\epsilon_5 = -0,2773394025$, $\epsilon_6 = 0,3150362585$, $\epsilon_7 = 0,4633102560$, $\epsilon_8 = 0,4668352033$, $\epsilon_9 = 0,5078250728$, y $\epsilon_{10} = 0,5736934876$.

Vamos a estudiar los intervalos aplicando las condicones de la **Caracterización 2**. Constru-yamos los 11 intervalos siguientes,

- $I_1 = (-\infty, \epsilon_1)$.
- $I_i = (\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) \forall i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $I_{11} = (\epsilon_{10}, \infty)$.

Estudiemos en estos intervalos los valores de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\Delta(f)$, $\Delta_1(f)$, $\Delta_{10}(f)$ y $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1)$.

Intervalo	t	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$	$\Delta(f)$	$\Delta_1(f)$	$\Delta_{10}(f)$	V	P
I_1	-1	-1.63e+01	-1.05e+02	-1.13e+02	2.65e+10	-6.33e+06	-8.77e+06	2	s
I_2	-0.45	4.46e-01	-1.06e+01	-4.12e+00	8.14e+05	-1.37e+04	-2.43e+03	2	s
I_3	-0.4	8.43e-01	-8.22e+00	-7.11e-01	1.99e+04	-7.72e+03	2.11e+03	2	s
I_4	-0.39	9.11e-01	-7.79e+00	-1.06e-01	-7.82e+04	-6.79e+03	2.72e+03	2	o
I_5	-0.3	1.38e+00	-4.77e+00	4.33e+00	-5.53e+05	-9.63e+02	5.69e+03	2	o
I_6	0	1.88e+00	-1.44e+00	9.66e+00	-8.72e+05	4.41e+03	6.9445e+03	2	o
I_7	0.4	1.14e+00	-6.20e+00	2.53e+00	-4.01e+05	-3.45e+03	4.73e+03	2	o
I_8	0.46	8.34e-01	-8.04e+00	1.44e-01	-5.81e+04	-7.21e+03	2.76e+03	2	o
I_9	0.48	7.12e-01	-8.75e+00	-7.47e-01	1.27e+05	-8.84e+03	1.77e+03	2	s
I_{10}	0.55	2.04e-01	-1.16e+01	-4.27e+00	1.36e+06	-1.68e+04	-3.88e+03	2	s
I_{11}	1	-8.04e+00	-5.55e+01	-4.80e+01	1.31e+09	-9.51e+05	-9.66e+05	2	s

Cuadro 4.2: Hemos denotado como **V** a $\mathbf{Var}(1, a, b, c, 1)$. Y en la columna **P** a la posición entre los dos elipsoides, 's' si están separados y 'o' si estan superpuestos.

Podemos concluir con los datos del cuadro 4.2 que en el intervalo $(-\infty, \epsilon_3) \cup (\epsilon_8, \infty)$ los dos elipsoides están separados, y en el intervalo (ϵ_3, ϵ_8) estos se encuentran superpuestos. Por último destacar que en ϵ_3 y ϵ_8 los elipsoides se encuentran superpuestos. Veamos algunas imagenes que ilustrán nuestro ejemplo.

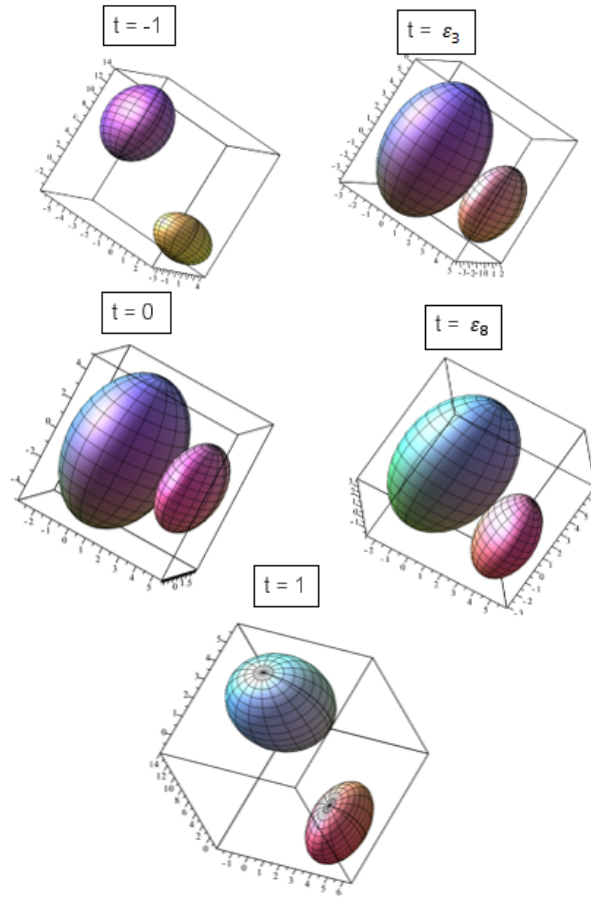


Figura 4.4: Posición de los elipsoides \mathcal{A} y \mathcal{B} . Imagen construida con Maple18.

Análisis del tiempo en ejecutar el algoritmo para el caso tridimensional.

En este otro cuadro exponemos los 5 casos para los cuales hemos estudiado los tiempos en ejecutar las diferentes técnicas mostradas.

Casos	$t_1(s)$	$t_2(s)$	$t_3(s)$	$t_4(s)$	$t_t(s)$
caso 1	0.031	0.047	0.109	0.0469	0.2339
caso 2	0.047	0.032	0.156	0.0625	0.2975
caso 3	0.047	0.031	0.172	0.0313	0.2813
caso 4	0.078	0.032	0.203	0.0313	0.3443
caso 5	0.063	0.016	0.266	0.0781	0.4231

Cuadro 4.3: Estudio de la posición de elipsoides en movimiento. Tiempos de cálculo.

En el Cuadro 4.3 se usa la siguiente notación:

1. t_1 representa el tiempo en hallar $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$.
2. t_2 el tiempo en calcular $\Delta(f)$, $\Delta_1(f)$ y $\Delta_{10}(f)$.

3. t_3 es el tiempo en hallar las raíces de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\Delta(f)$, $\Delta_1(f)$ y $\Delta_{10}(f)$.
4. t_4 muestra el tiempo en determinar la posición en cada intervalo.
5. Y finalmente t_t denota el tiempo total.

Para el interes del lector, los casos que aquí se exponen están ilustrados pormenorizadamente en el ANEXO.

Conclusiones

En este trabajo se derivan fórmulas para caracterizar cuando dos elipses o dos elipsoides se superponen, tienen un contacto tangencial externo o están separados por una recta o un plano, respectivamente. Es esta una cuestión que aparece de forma natural en la resolución de problemas en tratamiento de imágenes, robótica, modelización, etc. ya que es muy sencillo modelar distintos tipos de objetos mediante elipses y elipsoides.

Se demuestran en detalle los resultados en los que basan las fórmulas obtenidas que permiten caracterizar la posición relativa de dos elipses o dos elipsoides sin tener que calcular los puntos de intersección. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos elipses o dos elipsoides definidas respectivamente por medio de sus matrices asociadas $X^TAX = 0$ y $X^TBX = 0$. Se analizan en detalle los resultados en “W. Wang, J. Wang, M.-S. Kim: *An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. Computer Aided Geometric Design* 18, 531-539, 2001” que caracterizan la posición relativa de dos elipsoides en función del signo de las raíces reales del polinomio $f(\lambda) = \det(\lambda A + B)$, se extienden estos resultados al caso de elipses y, usando las técnicas de eliminación de cuantificadores presentadas en “J. Caravantes, L. Gonzalez-Vega: *On the Interference Problem for Ellipsoids: Experiments and Applications, Lecture Notes in Computer Science* 10931, 89-97, 2018”, se caracteriza dicha posición relativa en función de las entradas de las matrices A y B . De esta forma se determina la posición relativa de \mathcal{A} y \mathcal{B} sin tener que calcular los puntos de intersección entre ambos objetos y solo es necesario evaluar las fórmulas antes mencionadas.

Este trabajo incluye también una experimentación en Maple donde se analiza la eficiencia de la aplicación de estas fórmulas para determinar cuando dos elipses o dos elipsoides, en movimiento, están separados por una recta o por un plano, respectivamente.

Todos los cálculos y gráficos aquí presentados han sido desarrollados usando herramientas de cálculo matemático: Maple18, Matlab2017a y Geogebra. La memoria se ha escrito usando L^AT_EX

Bibliografía

- [1] Sitio web. RAE. Definición de naturaleza según la RAE.
<http://dle.rae.es/srv/fetch?id=QHIB7B3>. 2ª acepción.
Visitado el día 20/08/2018.
- [2] Sitio web. <https://www.pinterest.fr/amenanathan/escrime>.
Visitado el día 20/08/2018.
- [3] Sitio web. <https://omicronno.lespanol.com/2015/08/china-abre-su-primera-fabrica-controlada-completamente-por-robots>.
Visitado el día 20/08/2018.
- [4] Sitio web. <https://sites.google.com/site/licmatematicasonline/conicas-1>.
Visitado el día 20/08/2018.
- [5] Sitio web. <http://caminos.udc.es/info/asignaturas/101/pdfs/teoria19.pdf>.
Visitado el día 02/04/2018.
- [6] Sitio web. <https://www.geogebra.org/m/pdbrPrMz>.
Visitado el día 20/08/2018.
- [7] Sitio web. <http://cms.dm.uba.ar/materias/1erCuat2007/geometria/Apunte-4.pdf>.
Visitado el día 02/04/2018.
- [8] WENPING WANG, JIAYE WANG, MYUNG-SOO KIM. *An algebraic condition for the separation of two ellipsoids*. Computer Aided Geometric Design 18, 531-539, 2001.
- [9] BISWA NATH DATTA. *Numerical Linear Algebra and applications* 152-155. Pacific Grove, California, USA, 1995.
- [10] RAJENDRA BHATIA. *Matrix analysis* 152-155. New York, USA, 1997.
- [11] L. GONZALEZ-VEGA. *A combinatorial algorithm solving some quantifier elimination problems*. En: Caviness B.F., Johnson J.R. (eds) Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition. Texts and Monographs in Symbolic Computation, 365-375, Springer, 1998.
- [12] SAUGATA BASU, RICHARD POLLACK, MARIE-FRANÇOISE ROY. *Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computation in Mathematics*, Springer—Verlag, 2006.
- [13] JORGE CARAVANTES, LAUREANO GONZÁLEZ-VEGA. *On the Interference Problem for Ellipsoids: Experiments and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 10931, 89-97, 2018

- [14] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA, B. ELIZALDE, F. THOMAS *New algebraic conditions for the identification of the relative position of two coplanar ellipses*. Computer Aided Geometric Design 54, 5-48 (2017).
- [15] WENPING WANG, Y-K. CHOI, B. CHAN, M.S. KIM, J. WANG. *Efficient collision detection for moving ellipsoids using separating planes*. Computing 72, 235–246 (2004).
- [16] YI-KING CHOI, WENPING WANG, YANG LIU, AND MYUNG-SOO KIM. *Continuous Collision Detection for Two Moving Elliptic Disks*, IEEE transactions on robotics, VOL. 22, NO. 2, April 2006.
- [17] YI-KING CHOI, WENPING WANG, YANG LIU, AND MYUNG-SOO KIM. *Continuous Collision Detection for Ellipsoids*, IEEE transactions on visualization and computer graphics, VOL. 15, NO.2, March April 2009.
- [18] JUAN BURGOS. *Álgebra lineal y geometría cartesiana*, pag. 446-569. 3rd ed. Madrid, Spain, 2006.
- [19] Sitio web. <http://caminos.udc.es/info/asignaturas/101/pdfs/teoria18.pdf>. Visitado el día 02/04/2018.
- [20] Sitio web. <https://personal.us.es/angeles/MiJoomla/images/MAO/tema7.pdf>. Visitado el día 23/08/2018.